

چند نمونه سوال از تحلیل ابعادی

۱- نیروی گرانشی بین دو جرم m و m' به شکل $F = G \frac{mm'}{r^2}$ است که در آن r فاصله‌ی دو جرم از هم و F نیرو است. فرض کنید جرم یک لگنان بر حسب فاصله از مرکز آن به شکل $\rho = ar^b$ باشد که در آن a و b ثابت است. اکنون ستاره‌ها را در نظر بگیرید که در فاصله‌ی r از مرکز این لگنان روی دایره‌ها با شعاع r می‌چرخند. در این صورت، سرعت حرکت ستاره‌ها در فاصله‌ی r با r^c متناسب می‌شود. با تحلیل ابعادی ستاره c را بدست آورید.

حل: می‌خواهیم سرعت v را بر حسب کمیت‌ها که در بنویسیم تا c را پیدا کنیم. چون شدت گرانشی است پس هم‌اگر کمیت با بُعد و ثابت G وارد می‌شود، که در اینجا (بُعد) آن از نیروی گرانشی داده شده در مسئله به دست می‌آید. هم‌اگر کمیت‌های a و r نیز وارد می‌شوند. بنابراین با این کمیت‌ها، یک کمیت بدون بُعد Q را می‌سازیم.

$$Q = v^\alpha G^\beta a^\gamma r^\delta$$

$$[Q] = 1 = (LT^{-1})^\alpha (M^{-1}L^3T^{-2})^\beta (ML^{-3-b})^\gamma (L)^\delta$$

$$\therefore \begin{cases} -\beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \beta = \gamma \\ -\alpha - 2\beta = 0 & \Rightarrow \beta = -\frac{\alpha}{2} \\ \alpha + 3\beta - (3+b)\gamma + \delta = 0 & \Rightarrow \alpha - \frac{3}{2}\alpha + (3+b)\frac{\alpha}{2} + \delta = 0 \Rightarrow \delta = -(1 + \frac{b}{2})\alpha \end{cases}$$

$$\therefore Q = \left(\frac{v}{G^{1/2} a^{1/2} r^{1+b/2}} \right)^\alpha \Rightarrow v = k \sqrt{Ga} r^{1+b/2} \Rightarrow \boxed{c = 1 + \frac{b}{2}}$$

۲- می‌خواهیم با روش تحلیل ابعادی دمای سطح خورشید را با دانستن فوکانس غالب در تابش خورشید تخمین بزنیم. شدت را بر طبق رابطه حل می‌کنیم.

(آ) همان طوری که در درس فیزیک دبیرستان آموختیم، انرژی فوتون، E ، و فوکانس آن، f ، دارای رابطه $E = hf$ هستند. با استفاده از این رابطه، بُعد ثابت پلانک، h ، را به دست آورید.

(ب) می‌دانیم انرژی متوسط حرارتی یک ذره نقطه‌ای در دمای T ، از رابطه $E = \frac{3}{2} k_B T$ به دست می‌آید که در آن k_B ثابت بولتزمن است. بُعد ثابت بولتزمن، k_B ، را مناسب کنید.

(ج) حال با استفاده از تحلیل ابعادی از کمیت‌های ثابت بولتزمن، k_B ، ثابت پلانک، h ، و فوکانس نور، f ، کمیتی با بُعد دما بسازید.