۱) الف - ظرفیت یک خازن مسطح $\frac{\varepsilon A}{d}$

در این مسأله ظرفیت معادل برابر دو خازن سری C_1 و C_2 است.

$$C_1=\frac{\varepsilon_1 A}{d_1}\ ,\ C_2=\frac{\varepsilon_2 A}{d_2}\qquad \frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}$$

2

$$\Rightarrow C=\frac{\frac{\varepsilon_1 A}{d_1}\cdot\frac{\varepsilon_2 A}{d_2}}{\frac{\varepsilon_1 A}{d_1}+\frac{\varepsilon_2 A}{d_2}}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 A}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}\ \mathrm{F}$$

2

ب) مقاومت معادل این مدار از دو مقاومت سری که هرکدام به شکل یک مکعب مستطیل هستند.

$$\rho_1=\frac{1}{\sigma_1}\qquad R_1=\frac{\rho_1 d_1}{A}=\frac{d_1}{\sigma_1 A}\ ,\ R_2=\frac{d_2}{\sigma_2 A}$$

2

$$R=R_1+R_2=\frac{d_1}{\sigma_1 A}+\frac{d_2}{\sigma_2 A}=\frac{1}{A}\left(\frac{d_1\sigma_2+d_2\sigma_1}{\sigma_1\sigma_2}\right)\ \Omega$$

2

ج)

$$J=\frac{I}{A}\ ,\ I=\frac{V_0}{R}\ \mathrm{A}$$

2

$$J=\frac{V_0}{RA}=\frac{V_0\sigma_1\sigma_2}{d_1\sigma_2+d_2\sigma_1}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

۲) کلید در وضعیت 1 : مدار RL با منبع در زمان‌های طولانی القاگر مانند سیم جریان عبور می‌دهد

$$i = \frac{V_0}{R}$$ 1

با تحلیل RL : $L\frac{di}{dt} + Ri = V_0 \Rightarrow i = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \xrightarrow{t \gg \frac{L}{R}} i = \frac{V_0}{R}$

$\underline{t=0}$ $\quad U = U_C + U_L = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2$

$q = 0 \Rightarrow U_C = 0 \quad , \quad U_L = \frac{1}{2}L\left(\frac{V_0}{R}\right)^2 = \frac{LV_0^2}{2R^2}$ 1

1

ب) کلید در وضعیت 2 : مدار LC

1

$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow q = Q\sin(\omega t + \varphi)$ 1 $, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$t = 0 \Rightarrow q = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ 1

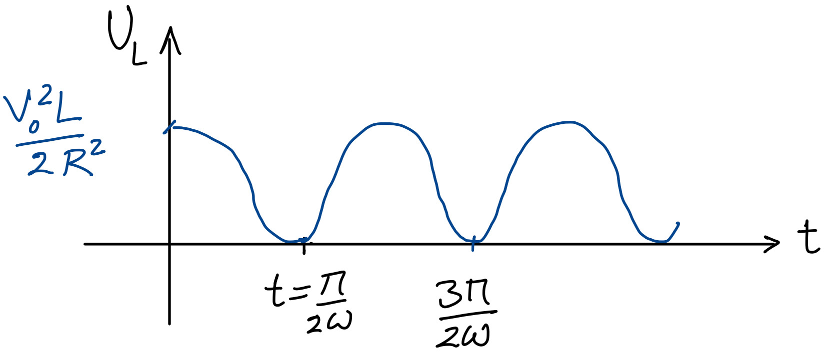
1

$$\left.\begin{array}{l} i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\sin\omega t) = Q\omega\cos(\omega t) \\ i(t=0) = \frac{V_0}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow Q\omega = \frac{V_0}{R} \Rightarrow Q = \frac{V_0}{R\omega}$$

ج)

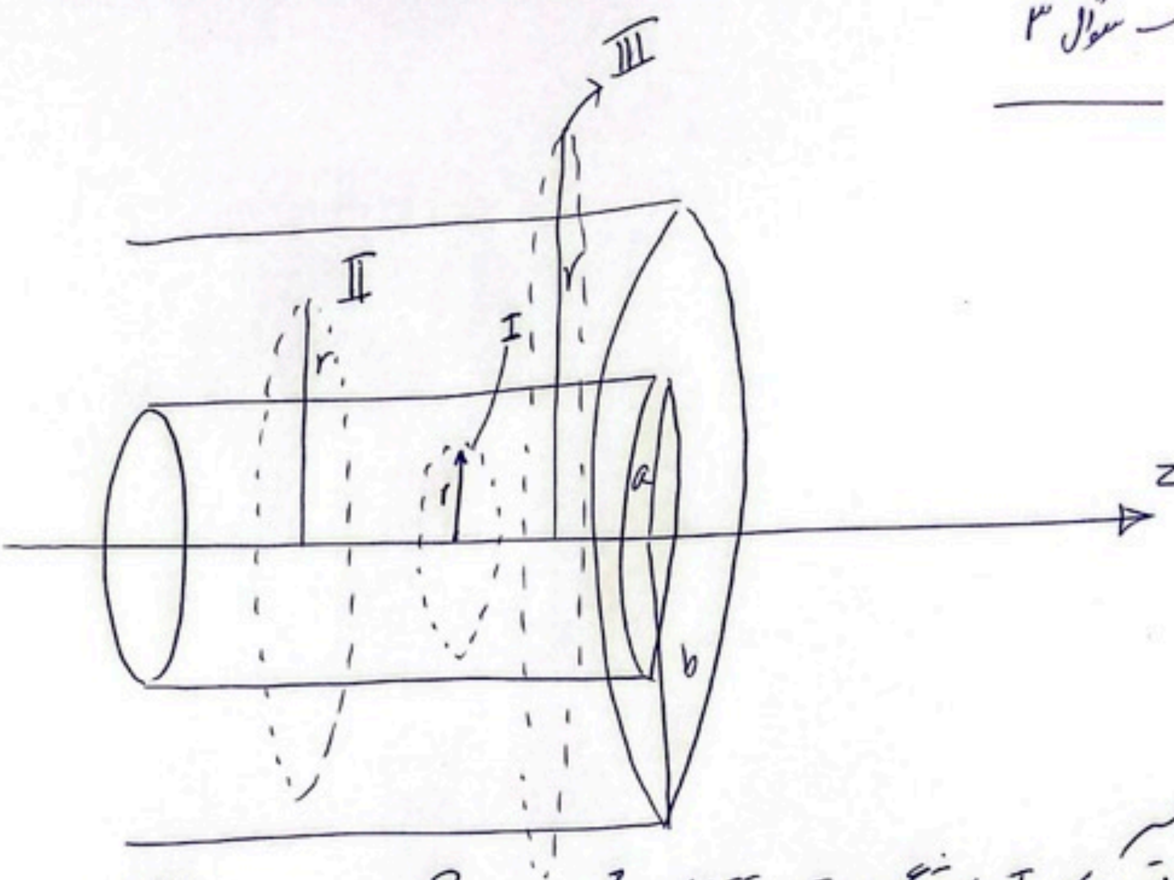
$$U_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{V_0}{R}\cos\omega t\right)^2 = \frac{V_0^2 L}{2R^2}\cos^2\omega t$$

2



1

جواب سؤال ۳



الف) $r<a$ — حلقه آمپری I به شعاع r با توجه به تقارن استوانه‌ای انتخاب می‌شود.

قانون آمپر: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$ 1 $\to B(2\pi r) = \mu_0 i_{enc}$ 1

$i_{enc} = I\,\dfrac{\pi r^2}{\pi a^2}$ 1 جریان محصور — با توجه به تقارن $\to B(2\pi r) = \mu_0 I\,\dfrac{\pi r^2}{\pi a^2}$

$\vec{B} = \left(\dfrac{\mu_0}{2\pi a^2} I\right) r\,\hat{\phi}$ 1

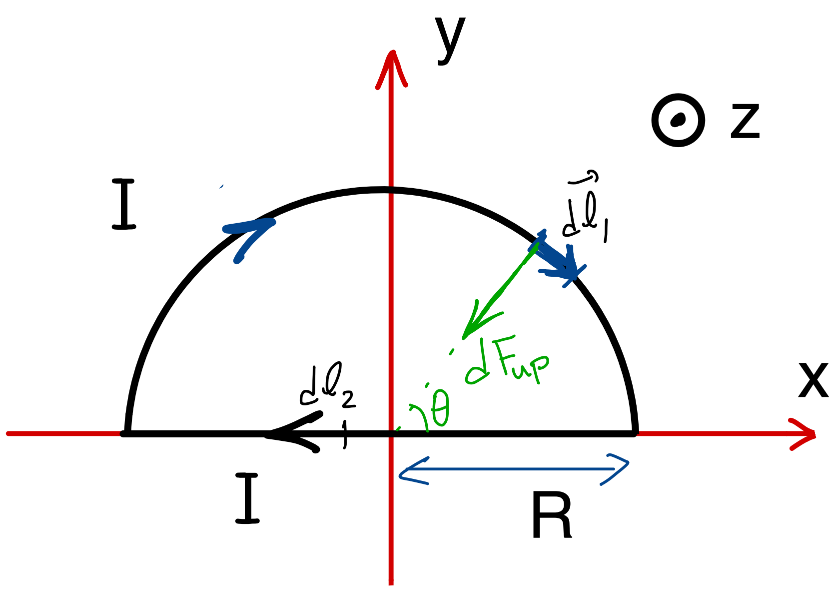
ب) حلقه آمپری II — $a<r<b$ 1

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$ 1 $\to B(2\pi r) = \mu_0 I$

$\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{2\pi r} I\,\hat{\phi}$ 1

ج) حلقه آمپری III — $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(0)$ 1 1 $\to B = 0$ 1

٤



الف)

نیم حلقه بالایی $d\vec{F}_{up} = I\, d\vec{l}_1 \times \vec{B}$

$$|dF_{up}| = I\, dl_1 B \sin\frac{\pi}{2}$$

$$dl_1 = R\, d\theta$$

$$d\vec{F}_{up} = |dF_{up}|(-\cos\theta\, \hat{x} - \sin\theta\, \hat{y}) \quad 1$$

$$\vec{F}_{up} = \int d\vec{F}_{up} = \int_0^{\pi} (-IRB)(\cos\theta\, \hat{x} + \sin\theta\, \hat{y})\, d\theta \Rightarrow \quad 1$$

$$\vec{F}_{up} = (-RIB)\left[\hat{x}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta + \hat{y}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\right] = (-RIB)\left(0 - \hat{y}\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right) = -2RIB\,\hat{y}$$

قطر پایینی $d\vec{F}_{down} = I\, d\vec{l}_2 \times \vec{B} = I\, dl_2 B \sin\frac{\pi}{2}\, \hat{y} \Rightarrow \quad 1$

$$\vec{F}_{down} = \int d\vec{F}_{down} = \hat{y}\, IB \int_0^{2R} dl_2 = 2IBR\, \hat{y} \quad 1$$

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{up} + \vec{F}_{down} = 0 \quad 1$$

ب)

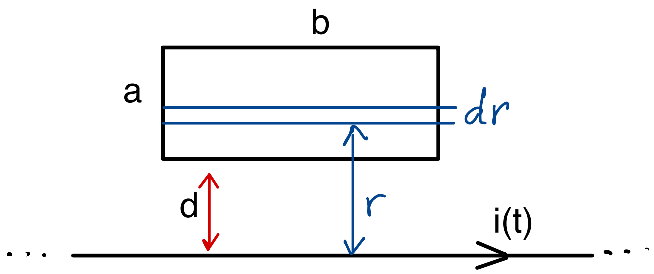
$$|\vec{\mu}| = I\left(\frac{\pi R^2}{2}\right) \quad 1 \qquad \vec{\mu} = |\vec{\mu}|(-\hat{z}) \quad 1$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی

ج)

گشتاور نیرو $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = |\vec{\mu}|(-\hat{z})B(\hat{x} + \hat{z}) \quad 2$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \frac{\pi R^2 I}{2} B(-\hat{y}) \quad 1$$



۵) الف - میدان مغناطیسی یک سیم راست

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} \Rightarrow$$

بیرون سو

$$B(2\pi r) = \mu_0 i(t) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}$$ 2

$$\varphi_B = \int B\cdot\hat{n}\,da = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\, b\,dr = \frac{\mu_0 b\, i(t)}{2\pi}\int_d^{d+a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 b\, i(t)}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

2

ب)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varphi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\frac{d}{dt}\left(I_0 \sin\omega t\right)$$

2

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\mu_0 b\,\omega I_0}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\cos\omega t$$

جریان القایی $$i_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\mu_0 b\,\omega I_0}{2\pi R}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\cos\omega t$$ 1

ج)

$$\phi_B = L\,i \Rightarrow L = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

3