سیاه‌چاله‌های ریسمانی، میکروحالت‌های سیاه‌چاله و شمارش وفا-استرومینگر

کوروش علامه-96100906

چکیده

در این درس‌مقاله، ابتدا مقدمات فیزیک سیاه‌چاله‌ها و قوانین ترمودینامیک آن‌ها بیان می‌شود. سپس ترمودینامیک و مکانیک آماری ریسمان‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. با مفاهیم بدست آمده ابتدا توصیفی کیفی و نادقیق اما ساده از انتروپی سیاه‌چاله‌ها با نظریه ریسمان بیان می‌شود. در نهایت محاسبات با بررسی سیاه‌چاله‌های ریسمانی و تحلیل دقیق میکروحالات انچام می‌شود تا تطابق شمارش حالات در نظریه ریسمان و فیزیک ماکروسکوپیک سیاه‌چاله‌ها آشکار شود.

فهرست مطالب

۱ مقدمه ۳

۲ مروری بر سیاه‌چاله‌ها ۴
۱.۲ سیاه‌چاله‌ها در $(1+3)$-بعد ۴
۲.۲ (ترمو)دینامیک سیاه‌چاله‌ها ۷
۱.۲.۲ قانون صفرم ۸
۲.۲.۲ قانون اول ۸
۳.۲.۲ قانون دوم ۸
۳.۲ تابش هاوکینگ ۹
۱.۳.۲ نظریه میدان‌های کوانتومی در زمینه خمیده ۹
۲.۳.۲ تابش ذره در خارج سیاه‌چاله ۱۱
۴.۲ سیاه‌چاله‌ها در ابعاد بالاتر ۱۱

۳ ترمودینامیک ریسمان‌ها ۱۴
۱.۳ دمای هگدورن ۱۴
۲.۳ شمارش پارش‌ها ۱۴
۱.۲.۳ پارش‌های بوزونی ۱۴
۲.۲.۳ پارش‌های فرمیونی ۱۸
۳.۳ دما و انتروپی ریسمان نسبیتی ۲۰
۱.۳.۳ ریسمان‌های بوزونی ۲۰
۲.۳.۳ ابرریسمان‌ها ۲۲
۴.۳ تابع پارش ریسمان‌ها ۲۴

۴ توصیف کیفی انتروپی سیاه‌چاله با نظریه ریسمان ۳۰
۱.۴ افق کشیده و قطع فرابنفش ۳۰
۲.۴ مدل ریسمان بلند و تخمین انتروپی سیاه‌چاله شوارزشیلد ۳۵
۱.۲.۴ بررسی انتروپی در تشکیل و پاره شدن ریسمان‌ها ۳۵
۲.۲.۴ شعاع ژیراسیون برای مدل ولگشت ریسمان بلند ۳۷
۳.۲.۴ تخمین انتروپی سیاه‌چاله شوارزشیلد ۳۸

۵ سیاه‌چاله های ریسمانی و شمارش وفا-استرومینگر ۴۱
۱.۵ سیاه‌چاله رایزنر-نوردستروم اکستریمال $(1+4)$-بعدی با 3 بار متفاوت ۴۲
۲.۵ شمارش میکروحالت‌ها با روش ساده‌تر ۴۹
۳.۵ شمارش در نظریه میدان همدیس دوگان و روش وفا-استرومینگر ۵۱

۶ نتیجه‌گیری ۵۶

۱ مقدمه

سیاه‌چاله‌ها از جذاب‌ترین موجودات در طبیعت هستند. ویژگی‌های منحصر به فرد آن‌ها به فیزیک‌دان‌ها اجازه می‌دهد که آزمایش‌های ذهنی مختلف را با استفاده از مفاهیم حاکم بر آن‌ها طراحی کنند. هم‌چنین در چند سال اخیر قدم‌های مهمی مانند رصد سیاه‌چاله $M87$ و رصد امواج گرانشی برخورد این موجودات ،در تایید وجود آن‌ها برداشته شده است.

در سال 1975 هاوکینگ[۱] با محاسبات نظریه میدان‌های کوانتومی در خارج یک سیاه‌چاله نشان داد که این موجودات با لحاظ تصحیحات مرتبه اول کوانتومی برخلاف نگاه کلاسیکی، کاملا سیاه نیستند و از خود تابش گرمایی با دمایی مشخص می‌تابانند [۱]. این محاسبه به همراه کار دیگران مانند بکنستاین[۲] [۲]، به شکل‌گیری مفهوم ترمودینامیک سیاه‌چاله‌ها انجامید. بنابر قوانین حاکم بر تحول سیاه‌چاله‌ها انتروپی آن‌ها باید با مساحت متناسب باشد که در این صورت مقدار انتروپی این موجودات بسیار زیاد خواهد بود. مساله‌ای که در این‌جا مطرح می‌شود آن است که منشا میکروسکوپی این انتروپی چیست و درجات آزادی درون سیاه‌چاله چیستند؟

علاوه بر این‌ها در سال 1976 هاوکینگ استدلال کرد که اگر سیاه‌چاله‌ها تابش گرمایی داشته باشند و محاسبات شبه‌کلاسیکی در فرایند تابش معتبر باقی بماند، آن‌گاه سیاه‌چاله‌ها به کلی تبخیر می‌شوند و به نظر می‌رسد تمام اطلاعاتی که در مقدار زیاد انتروپی نهفته بوده است، به صورت تابش گرمایی که دارای اطلاعات تقریبا صفر است، از دست می‌رود [۳]. چنین اتفاقی با تحول یکانی سیاه‌چاله که بنابر مکانیک کوانتومی پذیرفته می‌شود در تناقض است. به این تناقض، پارادوکس اطلاعات هاوکینگ گویند و شناخت درجات آزادی سیاه‌چاله‌ها می‌تواند کلید حل این متناقض‌نما باشد.

نظریه ریسمان به عنوان یکی از نامزدهای یک نظریه گرانش کوانتومی، تاکنون کامل‌ترین جواب را در مورد چیستی درجات آزادی سیاه‌چاله‌ها بدست داده است. در سال 1996 وفا و استرومینگر موفق شدند برای نوع خاصی از سیاه‌چاله‌های اکستریمال در $(1+4)$-بعد، با شمارش میکروحالت‌ها از نظریه ریسمان، انتروپی را محاسبه کنند [۴]. هم‌چنین قدم‌هایی هم برای توصیف انتروپی سیاه‌چاله‌های نسبیت عامی در $(1+3)$-بعد توسط افرادی مثل ساسکیند برداشته شده است [۵] اما این محاسبات مانند محاسبات کیفی هستند و مانند وفا و استرومینگر جواب دقیق بدست نمی‌دهند. تمام این موفقیت‌ها انگیزه بخش برای مطالعه نظریه ریسمان و تلاش برای کامل کردن آن به عنوان یک نظریه گرانش کوانتومی است.

در این درس مقاله ابتدا در فصل دوم به مقدمات و ویژگی‌های مربوط به سیاه‌چاله‌ها می‌پردازیم و قوانین حاکم بر تحول و ترمودینامیک این موجودات را بیان می‌کنیم. در آخر این فصل هم به سیاه‌چاله‌ها در ابعاد بالاتر می‌پردازیم. در فصل سوم ترمودینامیک ریسمان‌ها را به تفصیل بررسی می‌کنیم و ابزارهایی که برای نوشتن مکانیک آماری در نظریه ریسمان نیاز داریم را تولید می‌کنیم. در فصل چهارم اولین محاسبه نظریه ریسمان را برای توجیه انتروپی سیاه‌چاله‌ها بیان می‌کنیم. در این فصل با استفاده از مدل ول‌گشت یک ریسمان بلند به طور کیفی انتروپی سیاه‌چاله‌های شوارزشیلد $(1+3)$-بعدی را توصیف می‌کنیم. در نهایت در فصل پنجم سیاه‌چاله‌های ریسمانی اکستریمال $(1+4)$-بعدی را با فشرده‌سازی $Dp-brane$ ها روی ساختارهای فشرده مناسب می‌سازیم و سپس با دو روش مختلف به شمارش حالات برای این موجودات می‌پردازیم.

---

[۱] Hawking
[۲] Bekenstein

۲ مروری بر سیاه‌چاله‌ها

برای صحبت در مورد سیاه‌چاله‌ها در نظریه ریسمان ابتدا باید آن‌ها را به طور مجزا بشناسیم. در این فصل سعی بر آن است که مقدماتی از گرانش و هندسه که در فصل‌های آتی به کار خواهند آمد را بیان کنیم. لازم به ذکر است که برای توضیح مفصل و دقیق تمام این موارد به وقت بیش‌تری نیاز خواهد بود اما ما بسیاری از محاسبات گرانشی این بخش را با ارجاع به منابع به خواننده واگذار می‌کنیم چرا که هدف اصلی این درس‌مقاله بحث روی سیاه‌چاله‌ها در نسبیت عام نیست. در این فصل ابتدا به طور نسبتا دقیق تعریف سیاه‌چاله‌ها را بیان می‌کنیم. سپس به قوانین تحول آن‌ها اشاره می‌کنیم و در ادامه با لحاظ اثرات کوانتومی آن‌ها را به ترمودینامیک ربط می‌دهیم. در انتها به سیاه‌چاله‌ها در ابعاد بالاتر خواهیم پرداخت که در نظریه ریسمان دارای اهمیت هستند.

در هر فضازمان $(d+1)$-بعدی با متریک $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$، که d بعد از آن فضاگونه هستند، می‌توان ناحیه‌ای تحت عنوان سیاه‌چاله تعریف کرد. به ناحیه‌ای از فضازمان سیاه‌چاله گویند که نتوان از درون آن به خارج آن ناحیه، سیگنالی ارسال کرد. به طور دقیق تر اگر خم علّی (با بردار مماس غیر فضاگونه) $\gamma(\lambda)$ در پارامتری مانند λ_0 داخل ناحبه سیاه‌چاله قرار گیرد، آنگاه برای $\forall\lambda > \lambda_0$ این خم درون این ناحیه خواهد ماند. به مرز این ناحیه افق رویداد[۳] می‌گویند.

۱.۲ سیاه‌چاله‌ها در $(3+1)$-بعد

برای درک بهتر تعریف بالا، باید مثال‌های از فضازمان‌های دارای سیاه‌چاله را بررسی کنیم. اولین و ساده‌ترین فضازمانی که دارای چنین ناحیه‌ای است، فضازمان شوارزشیلد[۴] است که در سال 1915 توسط کارل شوارزشیلد بدست آمد. وی این فضازمان را به عنوان یکی از جواب‌های خلاء معادلات میدان اینشتین بدست آورد و بعدها با قضیه بیرخوف[۵] مشاهده شد که این جواب، جواب یکتای معادلات خلاء با قید استاتیک و متقارن کروی بودن است. اما درک دقیق مفهوم وجود ناحیه‌ای تحت عنوان سیاه‌چاله، مدت‌ها به طول انجامید، تا در دهه 60 میلادی، با تلاش‌های افراد زیادی مانند ویلر[۶] و فینکلشتاین[۷] به بیانی مشابه تعریفی که در بالا ارائه کردیم، درآمد.

هندسه جواب شوارزشیلد با متریک زیر داده میشود:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \qquad (۱)$$

که در آن به پارامتر $R_S = 2MG \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ شعاع شوارزشیلد گویند، که در آن G ثابت نیوتن در $(3+1)$-بعد و M جرم منسوب به سیاه‌چاله است و $d\Omega_2^2$ متریک روی کره واحد 2 -بعدی S^2 است. لازم به ذکر است که متریک بالا $(3+1)$-بعدی است. در ادامه این متریک را به ابعاد بالاتر تعمیم خواهیم داد.

با نگاه به معادله ۱ در دو مقدار $r=0$ و $r = R_S$ رفتار متریک ناخوشایند بنظر می‌آید. می‌توان با تغییر

---

[۳] Event horizon
[۴] Schwarzschild
[۵] Birkhoff
[۶] Wheeler
[۷] Finkelstein

مختصات نشان داد که $r = R_S$ یک تکینگی مختصاتی است، اما بدرفتاری $r = 0$ مستقل از مختصات است و این نقطه یک تکینگی انحنایی را نشان می‌دهد. در نهایت لازم به ذکر است که ناحیه $r < R_S$ یک ناحیه سیاه‌چاله است. این بدان معناست که همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، می‌توانیم ثابت کنیم اگر یک خم علّی در زمانی داخل این ناحیه باشد، در تمام زمان‌های آتی نیز درون ناحیه خواهد ماند. برای اثبات این ادعا خواننده می‌تواند به [۶] مراجعه کند. بنابراین ابرسطح $r = R_S$ افق رویداد در فضازمان شوارزشیلد است. این افق رویداد تکینگی انحنایی مرکز را از ناظرهای خارجی محافظت می‌کند در نتیجه در این مثال حدس سانسور کیهانی[۸] برقرار است.

نمونه دیگری از فضازمان‌هایی که ناحیه سیاه‌چاله دارند، فضازمان‌های رایزنر–نوردستروم[۹] هستند که تعمیم باردار سیاه‌چاله شوارزشیلد هستند، به این معنا که پاسخ‌های یکتای معادلات اینشتین–مکسول با شرط تقارن کروی هستند. متریک این هندسه‌ها به صورت زیر است:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{r} + \frac{Q^2G}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{r} + \frac{Q^2G}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \qquad (۲)$$

که در آن Q و M به ترتیب بار و جرم سیاه‌چاله هستند. می‌توان نشان داد که مشابه شوارزشیلد، $r = 0$ یک تکینگی انحنایی برای این متریک است. برای تحلیل ساده‌تر می‌توان این متریک را به صورت زیر نوشت:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \qquad (۳)$$

که در آن:

$$\Delta = r^2 - 2MGr + Q^2G = (r - r_+)(r - r_-). \qquad (۴)$$

$r_\pm = MG \pm G\sqrt{M^2 - Q^2}$ لزوما حقیقی نیستند و سه حالت خواهیم داشت:

(i) $|Q| > M$: در این حالت Δ ریشه حقیقی ندارد و $r = 0$ یک تکینگی لخت است، به این معنا که هیچ افق رویدادی وجود ندارد که آن را از دید ناظر خارجی مخفی کند. اگر حدس سانسور کیهانی بخواهد درست باشد، چنین حالتی برای هندسه رایزنر–نوردستروم نمی‌تواند از یک رمبش فیزیکی جرم نتیجه شود.

(ii) $|Q| < M$: در این حالت Δ دو ریشه حقیقی متمایز دارد. این ریشه‌ها تکینگی‌های مختصاتی هستند و با نوشتن متریک در مختصات مناسب (ر.ک. [۶]) می‌توان دید که این نقاط با سایر نقاط فضا تفاوتی ندارند.

(iii) $|Q| = M$: در این حالت Δ یک ریشه حقیقی مضاعف $r_\pm = MG$ دارد، که باز هم با تغییر مختصات مناسب می‌توان دید که این ریشه‌ها تکینگی مختصاتی هستند. به این گونه از جواب‌ها اکستریمال[۱۰] یا حدی گویند.

---

[۸] cosmic censorship conjecture
[۹] Nordström–Reissner
[۱۰] Extremal

مشابه شوارزشیلد می‌توان ثابت کرد [۶] که ناحیه $r < r_+$ برای این هندسه‌ها اگر r_+ حقیقی وجود داشته باشد، یک ناحیه سیاه‌چاله است و به تبع ابرسطح $r = r_+$ افق رویداد خواهد بود. سیاه‌چاله‌های اکستریمال برای مطالعات آتی ما در شمارش درجات آزادی سیاه‌چاله‌ها با نظریه ریسمان نقش مهمی ایفا خواهند کرد. قبل از آنکه پیش‌تر رویم، لازم است تعدادی تعریف را بیان کنیم.

تعریف: اگر میدان برداری در فضازمان باشد که با حرکت روی شار آن میدان، متریک ناوردا بماند، به نگاشت نمایی که از شار آن میدان بدست می‌آید یک ایزومتری[۱۱] گویند. همچنین به خود میدان برداری، میدان کیلینگ[۱۲] گویند. به طور ریاضیاتی این بدان معناست که مشتق لی متریک در راستای این میدان برداری باید صفر شود:

$$\mathcal{L}_X g = \nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0, \tag{۵}$$

که در بالا X میدان کیلینگ است. به معادله ۵، معادله کیلینگ گویند.

تعریف: یک ابر سطح پوچ (با بردار نرمال نورگونه) $\mathcal{N}$ را یک افق کیلینگ[۱۳] برای یک میدان کیلینگ ξ می‌نامند، اگر بر روی $\mathcal{N}$، ξ عمود بر $\mathcal{N}$ باشد. می‌توان برای چنین سطوحی ثابت کرد [۷]:

$$\xi.\nabla\xi^\mu = \kappa\xi^\mu, \quad on\ \mathcal{N}, \tag{۶}$$

که در آن:

$$\kappa = \left(-\frac{1}{2}(\nabla^\mu\xi^\nu)(\nabla_\mu\xi_\nu)\Big|_{\mathcal{N}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{۷}$$

را گرانش سطحی[۱۴] می‌نامند.

اگر سیاه‌چاله شوارزشیلد را در نظر بگیریم که در آن $R_S = 2MG$ آنگاه روی افق رویداد می‌توان میدان‌های کیلینگی یافت که نورگونه‌اند و برای آن‌ها داریم: $\kappa = \frac{1}{4MG}$. اما شهود فیزیکی این کمیت چیست؟ برای پاسخ به این سوال متریک نوعی زیر را متصور می‌شویم:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2. \tag{۸}$$

متریک بالا فرم معمول تمام سیاه‌چاله‌هایی است که تاکنون به آن‌ها اشاره کرده‌ایم. این متریک توصیف کننده یک فضازمان با تقارن $SO(d)$ است (به ترم مربوط به متریک کره واحد S^{d-1} دقت کنید). برای چنین متریکی می‌توان دید که شتاب ویژه یک ذره از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$|a| = \frac{f'^2}{4f}. \tag{۹}$$

[۱۱] isometry
[۱۲] Killing vector field
[۱۳] Killing horizon
[۱۴] surface gravity

حال ادعا می‌کنیم که گرانش سطحی نیرو (در واحد جرم) $a_\infty(r_0)$، لازم برای نگاه داشتن یک ذره روی افق $r = r_0$ توسط یک ناظر در بی‌نهایت است. برای یافتن این نیرو، یک ریسمان بی‌جرم را متصور شوید که ناظر بی‌نهایت با آن ذره‌ای در r را می‌کشد. اگر ناظر ذره را به اندازه مسافت δs بکشد، کار انجام شده عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
&W_\infty = a_\infty \delta s \quad (asymptotic\ infinity),\\
&W_r = a \delta s \quad (location\ r).
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

حال اگر کار انجام شده را به تابش با انرژی E تبدیل کنیم و تابش را در بی‌نهایت دریافت کنیم، تابش دچار سرخ‌گرایی می‌شود:

$$
\frac{E_\infty}{E_r} = \sqrt{\frac{g_{00}(r)}{g_{00}(\infty)}} \implies E_\infty = \sqrt{\frac{f(r)}{f(\infty)}} E_r = f(r)^{1/2} a \delta s, \tag{۱۱}
$$

که در بالا از این استفاده کردیم که $\lim_{r\to\infty} f(r) = f(\infty) = 1$. حال پایستگی انرژی بیان می‌کند که: $W_\infty = E_\infty$، پس $a_\infty = f^{1/2} a = f'/2$ یا:

$$
\kappa = a_\infty(r_0) = \frac{f'(r_0)}{2}. \tag{۱۲}
$$

حال اگر با این رابطه گرانش سطحی را برای متریک شوارزشیلد حساب کنیم داریم:

$$
\kappa = \frac{2MG}{2r^2}\bigg|_{r=2MG} = \frac{1}{4MG}, \tag{۱۳}
$$

که با نتیجه بدست آمده از ۷ مطابقت دارد. استدلال ما برای توجیه فیزیکی گرانش سطحی اندکی نادقیق بود، اما نتیجه بدست آمده برای سایر هندسه‌ها به فرم ۸ نیز کار می‌کند. خواننده می‌تواند با رابطه ۷ این را برای سیاه‌چاله رایزنر-نوردستروم نیز چک کند.

۲.۲ (ترمو)دینامیک سیاه‌چاله‌ها

حال به مرحله‌ای رسیده‌ایم که در مورد دینامیک سیاه‌چاله‌ها صحبت کنیم. یک قضیه مهم که در گرانش کلاسیک مطرح است، قضیه صلابت هاوکینگ[۱۵] است:

قضیه صلابت هاوکینگ: در یک فضازمان سیاه‌چاله خلاء مانا، تحلیلی و موضعا تخت افق رویداد، یک افق کیلینگ است.
اثبات: ر.ک.[۸]

این قضیه بیان می‌کند برای بسیاری از سیاه‌چاله‌ها که شامل تمام مثال‌هایی می‌شوند که تاکنون بیان کرده‌ایم، می‌توان گرانش سطحی تعریف کرد. در سال‌های ابتدایی دهه 70 میلادی، تعدادی قضیه در گرانش و هندسه توسط هاوکینگ، کارتر[۱۶] و باردین[۱۷] اثبات شدند[۹] که توصیف کننده تحول سیاه‌چاله‌ها بودند. حال این قوانین

[۱۵] Hawking's rigidity theorem
[۱۶] Carter
[۱۷] Bardeen

(قضایا) را بیان کنیم. لازم به ذکر است که قضیه صلابت هاوکینگ برای سیاه‌جاله‌هایی که این قوانین را ارضا می‌کنند برقرار است، چرا که وجود گرانش سطحی برای این قوانین لازم است.

۱.۲.۲ قانون صفرم

این قانون بیان می‌کند که گرانش سطحی κ بر روی افق یک سیاه‌چاله ثابت است [۶].

۲.۲.۲ قانون اول

این قانون بیان می‌کند که انرژی(جرم) یک سیاه‌چاله با سایر پارامترهای آن به صورت مشخصی مرتبط است[۶]:

$$G\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \varPhi\delta Q + \varOmega\delta J, \quad (۱۴)$$

که در آن A مساحت افق، $\varPhi$ پتانسیل الکتریکی، $\varOmega$ سرعت زاویه‌ای و J تکانه زاویه‌ای هستند. برای سیاه‌چاله شوارزشیلد می‌توانیم یک توجیه نادقیق اما ساده برای این قانون بیاوریم. همانطور که پیش‌تر دیدیم، شعاع افق در این سیاه‌چاله متناسب با جرم است. پس انتظار داریم که داشته باشیم:

$$GdM \propto dA. \quad (۱۵)$$

برای درست بودن بعد باید در سمت راست موجودی با بعد شتاب داشته باشیم. یک انتخاب طبیعی می‌تواند گرانش سطحی باشد:

$$GdM \approx \kappa dA \implies GdM = \frac{\kappa}{8\pi}dA, \quad (۱۶)$$

که در بالا از رابطه مساحت افق شوارزشیلد: $A = 16\pi M^2G^2$ استفاده کردیم. توجیه ساده‌لوحانه ما با ۱۴ در حالت سیاه‌چاله بی‌بار و بی‌تکانه زاویه‌ای مطابق شد که بیان‌گر منطقی بودن این قانون است.

۳.۲.۲ قانون دوم

این قانون صورت قضیه معروف هاوکینگ مرسوم به قضیه مساحت[۱۸] است، که بیان می‌کند در تحول یک سیاه‌چاله تنها مساحت افق رویداد می‌تواند افزایش یابد:

$$\delta A \geq 0. \quad (۱۷)$$

در سال 1973 بکنستاین مدعی شد [۲] که اگر سیاه‌چاله ها انتروپی نداشته باشند، آنگاه با توجه به اینکه همان‌طور که قبل‌تر دیده‌ایم سیاه‌چاله‌ها با پارامترهای اندک جرم، بار و تکانه زاویه‌ای توصیف می‌شوند(صورت قضیه بی‌مویی[۱۹] سیاه‌چاله‌ها)، اطلاعات و جزئیات ساختار اجرام سقوط کننده به سیاه‌جاله ها از دست می‌رود و قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود. به این ترتیب وی بیان کرد که می‌توان با منسوب کردن یک انتروپی به

[۱۸] area theorem
[۱۹] no hair theorem

سیاه‌چاله‌ها که متناسب با مساحت افق رویداد است از این نارسایی نجات یافت. هم‌چنین مدعی شد که ثابت تناسب برای تمام سیاه‌چاله‌ها باید یکی باشد.

هر خواننده‌ای که اندکی با ترمودینامیک آشنا باشد، قطعا متوجه تشابه عجیب قوانینی که بیان شد با قوانین ترمودینامیک می‌شود. همچنین ادعای بکنستاین نیاز به تعریف انتروپی و ارتباط آن با قانون دوم دینامیک سیاه‌چاله‌ها در بالا را بیش‌تر هم می‌کند. اما چند مشکل اساسی پیش روی ماست. قوانین بالا از قضایای هندسه بدست می‌آیند و هیچ دلیل محکمی تاکنون برای مرتبط دانستن آن‌ها با ترمودینامیک نداریم. و حتی بدتر از آن بنابر تعریف سیاه‌چاله‌های کلاسیک هیچ چیز به بیرون نمی‌تابانند. اگر چنین است چگونه می‌توان به آن‌ها دما نسبت داد؟
همان‌طور که خواهیم دید، پلی که مارا از قوانین بالا به ترمودینامیک می‌برد مکانیک کوانتومی است.

۳.۲ تابش هاوکینگ

در بخش قبل دیدیم که تشابه واضحی بین قوانین تحول سیاه‌چاله‌ها و قوانین ترمودینامیک وجود دارد. اما برای اولین بار محاسبات هاوکینگ بود که نشان داد سیاه‌چاله‌ها واقعا موجوداتی هستند که تابش می‌کنند و قوانین تحویل آن‌ها، قوانین ترمودینامیک هستند. اساس رویکرد هاوکینگ [۱] ایده‌ی گرانش شبه‌کلاسیک است. در این رویکرد میدان‌ها رفتار کوانتومی دارند، ولی گرانش به صورت کلاسیک رفتار می‌کند. بدین منظور باید نظریه میدان‌های کوانتومی را در زمینه خمیده اما بدون تحول بررسی کرد.

۱.۳.۲ نظریه میدان‌های کوانتومی در زمینه خمیده

برای نوشتن یک نظریه میدان کوانتومی در فضازمان زمینه خمیده، منطقی بنظر می‌آید که رویکر همیشگی خود در نسبیت عام را در پیش بگیریم و بسط میدان‌ها را با اصل کاپلینگ مینیمال[۲۰] به صورت هموردای عام[۲۱] بنویسیم. این کار قابل انجام است اما نتیجه‌ی بدست آمده در بعضی جهات با نظریه میدان در فضای تخت متفاوت است. دلیل اصلی این تفاوت از دست دادن مفهوم ناظرهای لخت جهانی[۲۲] در فضازمان خمیده است. این تفاوت شبیه به اتفاقی است که درگذار از نسبیت خاص به نسبیت عام اتفاق می‌افتد.
شاید مهم‌ترین امری که باید در نوشتن نظریه میدان در زمینه خمیده به یاد داشته باشیم، از دست رفتن مفهوم مطلق وجود یا عدم وجود ذرات در دید ناظرهای مختلف است. در نظریه میدان در فضای تخت، با استفاده از ناوردایی لورنتز ثابت می‌کنیم که ناظرهای مختلف روی وجود ذرات متفق‌القول هستند. می‌توانیم با استدلالی ساده نشان دهیم که در زمینه خمیده، چنین ادعایی دیگر ممکن نیست.
می‌توانیم نظریه میدان اسکالر را متصور شویم. در زمینه خمیده معادله میدان اسکالر بی‌جرم به صورت زیر است:

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi = 0. \tag{۱۸}$$

[۲۰] minimal coupling
[۲۱] general covariant
[۲۲] global families of inertial observers

برای یافتن جواب‌های این معادله می‌توان میدان را در یک پایه کامل از توابع f_ω بسط داد. در فضای جواب‌های ضرب داخلی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(f,h) = -i\int_\Sigma (f\nabla_n h^* - h\nabla_n f^*)\sqrt{|\gamma|}d^{n-1}x, \tag{۱۹}$$

که در آن انتگرال روی یک سطح کوشی[۲۳] گرفته شده است، که n بردار نرمال به آن و γ متریک القا شده بر آن است. در اینجا تعریف دقیق سطح کوشی را بیان نمی‌کنیم و به این بسنده می‌کنیم که سطحی است که اگر وجود داشته باشد، جواب معادله میدان با تعیین شرایط اولیه بر روی آن به طور یکتا تعیین می‌شود. برای خواندن تعریف دقیق آن می‌توان به [۶] رجوع کرد. با استفاده از این ضرب داخلی می‌توان پایه جواب‌ها را طوری در نظر گرفت که در $(f_\omega, f_{\omega'}) = \delta(\omega-\omega')$ صدق کنند.
میدان کوانتومی را می‌توان در این پایه بسط داد:

$$\phi = \int d\omega(a_\omega f_\omega + a^\dagger_\omega f^*_\omega), \tag{۲۰}$$

که در آن a_ω و $a^\dagger_\omega$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$[a_{\omega'}, a^\dagger_\omega] = \delta(\omega'-\omega), \quad [a_{\omega'}, a_\omega] = [a^\dagger_{\omega'}, a^\dagger_\omega] = 0. \tag{۲۱}$$

در نهایت برای توصیف کامل نظریه، باید حالات خلاء را به صورت زیر تعریف کرد:

$$a_\omega |0_a\rangle = 0, \quad \forall\omega > 0. \tag{۲۲}$$

اگر یک پایه دلخواه دیگر مثل $\{p_\omega, p^*_\omega\}$ را برای جواب‌ها متصور شویم، باز هم به طور معادل داریم:

$$\phi = \int d\omega(b_\omega p_\omega + b^\dagger_\omega p^*_\omega), \tag{۲۳}$$

که در این پایه هم روابط جابه‌جاگری مشابه a_ω ها برای b_ω ها برقرار است و حالت خلاء به طور مشابه تعریف می‌شود. برای ارتباط این دو پایه از تبدیل‌های بوگولیوبوو[۲۴] استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} p_\omega &= \int d\omega'(\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} f^*_{\omega'}), \\ f_\omega &= \int d\omega'(\alpha^*_{\omega'\omega} p_{\omega'} - \beta_{\omega'\omega} p^*_{\omega'}), \end{aligned} \tag{۲۴}$$

که در آن‌ها $\alpha_{\omega\omega'}$ و $\beta_{\omega\omega'}$ ضرایب بوگولیوبوو نامیده می‌شوند. با توجه به این تبدیل‌ها می‌توان دید که عملگرهای بسط میدان‌ها به صورت زیر مرتبط می‌شوند:

$$b_\omega = \int d\omega'(\alpha^*_{\omega\omega'} a_{\omega'} - \beta^*_{\omega\omega'} a^\dagger_{\omega'}). \tag{۲۵}$$

[۲۳] cauchy surface
[۲۴] bogolubov transformations

با ابزارهایی که معرفی کردیم، داریم:

$$\langle 0_a| \left(N^b_\omega\right) |0_a\rangle = \langle 0_a| \left(b^\dagger_\omega b_\omega\right) |0_a\rangle = \int d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2. \qquad (۲۶)$$

معادله آخر بیان می‌کند که حالت خلاء یک پایه خاص لزوما برای یک پایه دیگر خالی از ذره نیست، یا به بیان دیگر مفهوم ذره وابسته به ناظر است.

۲.۳.۲ تابش ذره در خارج سیاه‌چاله

هاوکینگ در سال 1974 [۱] رمبش ماده را در فضای خالی بررسی کرد و با استفاده از ۲۶ نشان داد که اگر در ابتدای امر ناظر خارجی خلاء ببیند، بعد از رمبش و تشکیل سیاه‌چاله ذراتی با توزیع گرمایی مشاهده می‌کند:

$$\langle 0_{in}| \left(b^\dagger_\omega b_\omega\right) |0_{in}\rangle = \frac{\Gamma_i}{e^{2\omega_i\pi/\kappa} - 1}, \qquad (۲۷)$$

که در آن $|0_{in}\rangle$ به معنای خلاء در زمان‌های اولیه و Γ_i فاکتور جذب است.
معادله ۲۷ نتیجه بسیار مهمی است. این معادله بیان می‌کند که با لحاظ اثرات کوانتومی مرتبه اول (تقریب شبه‌کلاسیک) سیاه‌چاله‌ها تابشی با دمای

$$T = \hbar\frac{\kappa}{2\pi}, \qquad (۲۸)$$

دارند. این به آن معناست که تشابه قوانین مکانیک سیاه‌چاله‌ها و قوانین ترمودینامیک، فراتر از یک تشابه است. قانون صفرم با اعمال ضریب تناسب مناسبی که اکنون آن را می‌دانیم همان قانون صفرم ترمودینامیک است. همچنین حال می‌بینیم که با مقایسه ۱۴ و ۲۸ ادعای بکنستاین، مبنی بر انتروپی داشتن سیاه‌چاله‌ها درست است و با خواندن ضرایب تناسب از مقایسه این دو معادله با باز نویسی تمام ثوابت داریم:

$$S = \frac{c^3 A}{4G\hbar}. \qquad (۲۹)$$

هاوکینگ محاسبات خود را برای سیاه‌چاله‌های باردار و چرخان نیز انجام داد. همچنین تا به امروز محاسبات برای میدان‌های فرمیونی نیز انجام شده است. در تمام این موارد نتیجه توزیع گرمایی می‌شود:

$$\langle N^{bh}_\omega\rangle = \frac{\Gamma_\omega}{e^{\frac{2\pi(\omega-\mu)}{\hbar\kappa}} \pm 1}, \qquad (۳۰)$$

که در بالا $+1$ برای فرمیون‌ها و -1 برای بوزون ها است. همچنین μ پتانسیل شیمیایی است.

۴.۲ سیاه‌چاله‌ها در ابعاد بالاتر

در این بخش به تعمیم سیاه‌چاله‌های شوارزشیلد و رایزنر–نوردستروم در $(d+1)$–بعد می‌پردازیم. برای ابعاد بالاتر از $(3+1)$، امکان‌های زیادی برای ساخت فضازمان‌هایی با نواحی سیاه‌چاله وجود دارد. اما برای حالتی

که قید استاتیک و متقارن کروی (با تقارن $SO(d)$) بودن را در خلاء $(d+1)$-بعدی لحاظ کنیم، تنها جواب ممکن فضازمان شوارزشیلد-تنگرلینی[۲۵] است[۱۰]. این فضازمان به متریک زیر مجهز است:

$$ds^2 = -\left(1 - (\frac{R_{S(d+1)}}{r})^{d-2}\right)dt^2 + \left(1 - (\frac{R_{S(d+1)}}{r})^{d-2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad (۳۱)$$

که در بالا $R_{S(d+1)}$ شعاع شوارزشیلد در $(d+1)$-بعد است:

$$R_{S(d+1)} = \left(\frac{16\pi G_{d+1} M}{(d-1)\mathcal{A}_{d-1}}\right)^{\frac{1}{d-2}}, \quad (۳۲)$$

و G_{d+1} ثابت نیوتن در $(d+1)$-بعد و $\mathcal{A}_n$ سطح کره واحد S^n است:

$$\mathcal{A}_n = \int_{S^n} d\Omega^n = \int_{S^n} d\phi \prod_{i=1}^{n-1} sin^i\theta_i d\theta_i = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}. \quad (۳۳)$$

برای این سیاه‌چاله با توجه به فرم متریک می‌توانیم از ۱۲ برای یافتن گرانش سطحی استفاده کرد:

$$\kappa = \frac{f'(R_{S(d+1)})}{2} = \frac{d-2}{2}\frac{(R_{S(d+1)})^{d-2}}{r^{d-1}}\bigg|_{r=R_{S(d+1)}} = \frac{d-2}{2R_{S(d+1)}}. \quad (۳۴)$$

که در نتیجه برای دما از ۲۸ داریم($\hbar = 1$):

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{d-2}{4\pi R_{S(d+1)}}. \quad (۳۵)$$

حال برای یافتن انتروپی از قانون اول استفاده می‌کنیم:

$$dM = TdS = \frac{d-2}{4\pi R_{S(d+1)}}dS = \frac{d-2}{4\pi}\left(\frac{(d-1)\mathcal{A}_{d-1}}{16\pi G_{d+1} M}\right)^{\frac{1}{d-2}} dS. \quad (۳۶)$$

که در نهایت با انتگرال گیری بدست می‌آوریم:

$$S = 4\frac{4\pi}{d-1}\left(\frac{16\pi G_{d+1}}{(d-1)\mathcal{A}_{d-1}}\right)^{\frac{1}{d-2}} M^{\frac{d-1}{d-2}} = \frac{\mathcal{A}_{d-1}(R_{S(d+1)})^{d-1}}{4G_{d+1}}. \quad (۳۷)$$

مساحت ابرسطح افق رویداد در $(d+1)$-بعد برابر است با: $\mathcal{A}_{d+1} = \mathcal{A}_{d-1}(R_{S(d+1)})^{d-1}$ پس داریم:

$$S = \frac{\mathcal{A}_{d+1}}{4G_{d+1}}, \quad (۳۸)$$

---

[۲۵] Schwarzschild–Tangherlini

که نشان می‌دهد همان‌طور که انتظار داریم قانون مساحت برای انتروپی در بعد بالاتر هم برقرار است.

حال به سراغ تعمیم سیاه‌چاله رایزنر-نوردستروم به $(d+1)$-بعد می‌رویم. متریک این هندسه به صورت زیر است[۱۱]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\mu}{r^{d-2}} + \frac{q^2}{r^{2(d-2)}}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2\mu}{r^{d-2}} + \frac{q^2}{r^{2(d-2)}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad (۳۹)$$

که پارامترهای آن با جرم و بار مرتبط هستند:

$$\mu = \frac{8\pi G_{d+1} M}{(d-1)\mathcal{A}_{d-1}}, \;\; q = \frac{2G_{d+1} Q}{(d-2)(d-1)}. \quad (۴۰)$$

تکینگی‌های مختصاتی را مشابه حالت $(3+1)$-بعدی داریم:

$$r_{\pm} = (\mu \pm \sqrt{\mu^2 - q^2})^{\frac{1}{d-2}}. \quad (۴۱)$$

می‌دانیم که افق رویداد در $r = r_+$ واقع شده است. با توجه به فرم متریک دوباره از ۱۲ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \kappa = \frac{f'(r_+)}{2} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{(r^{d-2} - r_+^{d-2})(r^{d-2} - r_-^{d-2})}{r^{2(d-2)}}\right)\Bigg|_{r=r_+} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(d-2)r_+^{d-3}(r_+^{d-2} - r_-^{d-2})}{r_+^{2(d-2)}} \\ &= \frac{(d-2)(r_+^{d-2} - r_-^{d-2})}{2r_+^{d-1}}. \end{aligned} \quad (۴۲)$$

در نتیجه دما و انتروپی را داریم:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{(d-2)(r_+^{d-2} - r_-^{d-2})}{4\pi r_+^{d-1}}, \\ S &= \frac{\mathcal{A}_{d+1}}{4G_{d+1}} = \frac{\mathcal{A}_{d-1} r_+^{d-1}}{4G_{d+1}} = \frac{\mathcal{A}_{d-1}}{4G_{d+1}}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - q^2}\right)^{\frac{d-1}{d-2}}. \end{aligned} \quad (۴۳)$$

می‌تواند جالب باشد که اشاره کنیم که در حالت اکستریمال، یعنی $\mu = q$ دمای هاوکینگ در تمام ابعاد به جز $d+1 = 3$ صفر می‌شود. هم چنین در این حالت انتروپی تنها وابسته به جرم است.

۳ ترمودینامیک ریسمان‌ها

پس از بحث نسبتا مفصل روی سیاه‌چاله‌ها و ترمودینامیک آن‌ها، لازم است اندکی در مورد ترمودینامیک ریسمان‌ها بدانیم تا بتوانیم در آینده آن‌ها را به سیاه‌چاله‌ها ربط دهیم.
ما روندی مشابه[۱۲] پیش خواهیم گرفت و ترمودینامیک ریسمان‌ها را در دمای بالا بررسی می‌خواهیم کرد. جالب‌ترین مفهومی که در مسیر با آن روبرو خواهیم شد رابطه‌ی خطی بین انتروپی و انرژی است که به کران‌دار شدن دمای ریسمان‌ها می‌انجامد. کران بالای دما با T_H مشخص می‌شود که آنرا دمای هگدورن[۲۶] می‌نامند. ابتدا اندکی در مورد تاریخچه و انگیزه تعریف این دما صحبت خواهیم کرد و سپس آنرا در چارچوب نظریه ریسمان بدست می‌آوریم.

۱.۳ دمای هگدورن

دمای هگدورن $T_h = \beta_H^{-1}$ بار اول در مطالعه هادرون‌ها معرفی شد[۱۳]. هگدورن چگالی حالات هادرون‌ها را در انرژی بالا به صورت زیر تقریب زد:

$$\omega(E) = e^{\beta_H E}, \tag{۴۴}$$

که در آن مقیاس جرم پایون استفاده شده بود: $T_H \sim m_\pi$ و در نتیجه تابع پارش قابل محاسبه است:

$$Z = \int_0^\infty dE\, \omega(E) e^{-\beta E} = \int_0^\infty dE\, e^{-(\beta-\beta_H)E}, \tag{۴۵}$$

که انتگرال در $\beta < \beta_H$ واگرا می‌شود. در نتیجه دمای هگدورن یک حد دما $T < T_H$ برای خوش تعریفی تابع پارش بدست می‌دهد. معنای فیزیکی این حد آن است که با افزایش انرژي به جای افزایش انرژي حالات موجود، حالات جدید با جرم بیشتر تولید می‌شوند و در نتیجه دمای حالات موجود محدود خواهد بود. اگرچه این کران‌دار بودن دما به نظر محدود کننده است، فرض هگدورن با مدل ریسمانی هادرون‌ها که خطوط رجی[۲۷] را درست توصیف می‌کرد پشتیبانی می‌شد. در ادامه خواهیم دید که چگونه این دما در تابع پارش ریسمان‌ها ظاهر می‌شود. اگرچه دمای هاگدورن در ابتدا در چارچوب فیزیک هادرون‌ها معرفی شده بود، در توصیف ریسمان‌های بنیادی که کلیدی برای توصیف سازگار مکانیک کوانتومی سیاه‌چاله‌ها هستند به کار خواهد آمد.

۲.۳ شمارش پارش‌ها

۱.۲.۳ پارش‌های بوزونی

ابتدا یک ریسمان غیرنسبیتی را متصور می‌شویم که دو سر آن ثابت هستند و در شرایط مرزی دیریکله صدق می‌کنند. جواب‌های معادله حرکت حاکم بر این سیستم را می‌توان برحسب توابع نوسانی کامل بسط داد که

[۲۶] Hagedorn temperature
[۲۷] Regge trajectories

فرکانس‌های نوسان آن‌ها مضرب‌های یک فرکانس مشخص ω_0 هستند. همیلتونی کوانتومی چنین ریسمانی به صورت زیر است:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{N} = \hbar\omega_0 \sum_{l=0}^{\infty} l a_l^\dagger a_l, \tag{۴۶}$$

که $\hat{N}$ عملگر تعداد است و $a_l^\dagger, a_l$ عملگرهای خلق و فنا هستند که در $[a_m, a_n^\dagger] = \delta_{mn}$ و $a_l \left|0\right\rangle = 0 \;\; \forall l$ صدق می‌کنند که در آن‌ها $\left|0\right\rangle$ خلاء ریسمان است. یک حالت دل‌خواه با اثر عملگرهای خلق بر خلاء بدست می‌آید:

$$\left|\psi\right\rangle = \prod_{l}^{\infty} (a_l^\dagger)^{n_l} \left|0\right\rangle, \tag{۴۷}$$

که در بالا n_l اعداد اشغال هستند که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$N = \sum_{l=1}^{\infty} l n_l, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{۴۸}$$

در نتیجه انرژي حالت $\left|\psi\right\rangle$ را داریم:

$$E_{\left|\psi\right\rangle} = \hbar\omega_0 N. \tag{۴۹}$$

با نگاه به انرژي ثابت، سوال طبیعی که به ذهن می‌رسد آن است که چه تعداد حالت با ویژه مقدار N برای $\hat{N}$ وجود دارند. برای پاسخ به این سوال باید تعداد پارش‌های N را محاسبه کرد. یک پارش N با i عضو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_i(N) := \{k_j \in \mathbb{Z}^+ | \sum_{j=1}^{i} k_j = N\}. \tag{۵۰}$$

در نتیجه تعداد کل پارش‌ها را داریم:

$$p(N) = \sum_{i=1} Number\ of\ different\ sets\ p_i(N). \tag{۵۱}$$

ما به دنبال رابطه‌ای برای $p(N)$ هستیم. در ادامه رابطه ای برای توصیف رفتار $ln\, p(N)$ در حد N بزرگ بدست خواهیم آورد. محاسبات دقیق‌تر تقریب معروف هاردی-رامانوجان[۲۸] را بدست می‌دهند که آنرا نیز بیان خواهیم کرد.

در آنسامل میکروکانونیک انتروپی به صورت تابعی از انرژی قابل محاسبه است:

$$S(E) = k\, ln\, p(N) = k\, ln\, p(\frac{E}{\hbar\omega_0}). \tag{۵۲}$$

---
[۲۸] Hardy–Ramanujan

در نتیجه اگر بتوانیم انتروپی را محاسبه کنیم، $ln\,p(N)$ را نیز بدست آورده‌ایم. برای محاسبه انتروپی، تابع پارش ریسمان غیرنسبیتی را محاسبه می‌کنیم:

$$Z = \sum_{\alpha} exp\Big(-\frac{E_\alpha}{kT}\Big) = \prod_{l=1}^{\infty}\sum_{n_l=0}^{\infty} exp\Big(-\frac{\hbar\omega_0 l n_l}{kT}\Big) = \prod_{l=1}^{\infty}\Big(1-exp(-\frac{\hbar\omega_0 l}{kT})\Big)^{-1}, \quad (۵۳)$$

که در تساوی آخر در بالا از حد مجموع دنباله هندسی استفاده کردیم. حال انرژی آزاد هلمهولتز را محاسبه می‌کنیم:

$$F = -kT\,ln\,Z = kT\sum_{l=1}^{\infty} ln\Big(1-exp(-\frac{\hbar\omega_0 l}{kT})\Big). \quad (۵۴)$$

برای فراتر رفتن، باید یک تقریب بزنیم. فرض می‌کنیم دما آنقدر بالا هست که: $\frac{\hbar\omega_0}{kT} \ll 1$ ، آنگاه می‌توانیم جمع را با یک انتگرال تقریب بزنیم:

$$F \simeq kT\int_1^{\infty} dl\,\Big(1-exp(-\frac{\hbar\omega_0 l}{kT})\Big) = \frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0}\int_0^{\infty} dx\,ln(1-e^{-x}), \quad (۵۵)$$

که در بالا تغییر متغیر $x = \frac{\hbar\omega_0 l}{kT}$ را لحاظ کردیم و فرض کردیم حد پایین انتگرال گیری یعنی $\frac{\hbar\omega_0}{kT}$ آنقدر کوچک است که بتوان آن‌را با صفر جای‌گزین کرد. حال بسط زیر را برای $0 \leq y < 1$ به یاد می‌آوریم:

$$ln(1-y) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}, \quad (۵۶)$$

و آن‌را در رابطه انرژی آزاد جای‌گزاری می‌کنیم:

$$F \simeq -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} dx\,\frac{(e^{-x})^n}{n!} = -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \quad (۵۷)$$

جمع آخر از مقدار تابع زتای ریمان بدست می‌آید:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (۵۸)$$

پس می‌توانیم حد دمای بالای انرژی آزاد را بنویسیم:

$$F \approx -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega_0}\frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{6\hbar\omega_0}\frac{1}{\beta^2}. \quad (۵۹)$$

حال می‌توانیم انتروپی و انرژی را محاسبه کنیم:

$$S=-\frac{\partial F}{\partial T}=k\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right). \qquad (۶۰)$$

$$E=-\frac{\partial\, ln\, Z}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F)=-\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{\hbar\omega_0}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^2\hbar\omega_0. \qquad (۶۱)$$

با ترکیب دو معادله بالا انتروپی را برحسب انرژي داریم:

$$S(E)=k\pi\sqrt{\frac{2E}{3\hbar\omega_0}}=2\pi k\sqrt{\frac{N}{6}}. \qquad (۶۲)$$

با مقابسه با ۵۲ تقریب مد نظر برای پارش بدست می‌آید:

$$ln\, p(N)\simeq 2\pi\sqrt{\frac{N}{6}}. \qquad (۶۳)$$

عبارت بالا تقریب $ln\, p(N)$ برای N بزرگ است، چرا که در حد دمای بالا:

$$N=\frac{E}{\hbar\omega_0}=\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^2\gg 1. \qquad (۶۴)$$

نتیجه محاسبه ما در ۶۳ ترم غالب بسط مشهور هاردی-رامانوجان است:

$$p(N)\simeq\frac{1}{4N\sqrt{3}}exp\left(2\pi\sqrt{\frac{N}{6}}\right). \qquad (۶۵)$$

لازم به ذکر است رابطه هاردی-رامانوجان هم همچنان یک عبارت دقیق نیست ولی بهترین تقریبی است که از مساله پارش داریم.
در ادامه لازم است محاسبات خود را اندکی تعمیم دهیم. تعمیم ما در نظر گرفتن B راستای عرضی نوسان مستقل از هم است. این تعمیم مساله مارا به مطالعه B نوسانگر هم‌فرکانس بی‌برهم‌کنش تبدیل می‌کند. تابع پارش، انتروپی و انرژی این سیستم به راحتی به تک نوسانگر مرتبط می‌شود:

$$Z_B=(Z)^B,\ \ S_B=BS,\ \ E_B=BE. \qquad (۶۶)$$

هم‌چنین داریم:

$$E_B=BE=\hbar\omega_0 N=\hbar\omega_0\sum_{l,b} l n_l^{(b)}. \qquad (۶۷)$$

که حالا N عدد اشغال کل برای سیستم B نوسانگر است. در نتیجه داریم:

$$S_B = B(2\pi k)\sqrt{\frac{1}{6}\frac{E}{\hbar\omega_0}} = 2\pi k\sqrt{\frac{B}{6}\frac{EB}{\hbar\omega_0}} = 2\pi k\sqrt{\frac{NB}{6}}. \tag{۶۸}$$

حال برای سیستم B نوسانگر اگر تعداد پارش‌ها را با $P(N;B)$ نشان دهیم، با توجه به $S_B = klnP(N;B)$ و ۶۸ داریم:

$$ln\ P(N;B) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{NB}{6}}. \tag{۶۹}$$

این بار هم می‌توان عبارت دقیق‌تر هاردی-رامانوجان را نوشت:

$$P(N;B) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{B}{24}\right)^{(B+1)/4} N^{-(B+3)/4} exp\left(2\pi\sqrt{\frac{NB}{6}}\right). \tag{۷۰}$$

۲.۲.۳ پارش‌های فرمیونی

در بخش قبل روی نوسانگرهای بوزونی بحث کردیم. اگر یک ریسمان فرمیونی غیرنسبیتی را متصور شویم، آنگاه نمی‌توان عملگرهای خلق را بیش از دوبار بر روی خلاء اثر داد. این‌بار باید محاسبات خود را برای شرایط فرمیونی متناسب کنیم. برای محاسبه مد نظر لازم است پارش‌های N به قسمت‌های نابرابر را بشماریم که تعداد آن‌ها را با $q(N)$ نشان می‌دهیم. برای مثال پارش‌های 6 به قسمت‌های نابرابر، 4 تا هستند:

$$\{6\},\ \ \{5,1\},\ \ \{4,2\},\ \ \{3,2,1\}. \tag{۷۱}$$

برای تمییز دادن این پارش‌ها، از اعداد f استفاده می‌کنیم و با کمی سوءاستفاده از نام‌گذاری به آن‌ها اعداد فرمیونی گوییم. حال عدد اشغال کل را برای F برانگیختگی فرمیونی می‌نویسیم:

$$N = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{f=1}^{F} l n_l^{(f)}, \tag{۷۲}$$

که باید دقت کنیم برای برانگیختگی‌های فرمیونی اعداد اشغال n_l تنها مقادیر 0 و 1 را اخذ می‌کنند. در نتیجه تابع پارش به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\begin{aligned} Z = \sum_{n_l=0,1} e^{-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\Sigma_{l=1}^{\infty}\Sigma_{f=1}^{F} l n_l^{(f)}} &= \prod_{f=1}^{F}\prod_{l=1}^{\infty}\sum_{n_l=0,1}\left(e^{-\frac{\hbar\omega_0}{kT}l}\right)^{n_l^{(f)}} \\ &= \left(\prod_{l=1}^{\infty}\left(1+e^{-\frac{\hbar\omega_0}{kT}l}\right)\right)^{F}. \end{aligned} \tag{۷۳}$$

با گرفتن لگاریتم در حد دمای بالا و همان تغییر متغیر قبل، داریم:

$$ln\, Z = F\sum_{l=1}^{\infty} ln(1+e^{-\frac{\hbar\omega_0}{kT}l}) \simeq \frac{FkT}{\hbar\omega_0}\int_0^\infty dx\, ln(1+e^{-x}). \tag{۷۴}$$

حال از بسط تیلور لگاریتم استفاده می‌کنیم:

$$ln\, Z \simeq \frac{FkT}{\hbar\omega_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^\infty dx e^{-nx} = \frac{FkT}{\hbar\omega_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}. \tag{۷۵}$$

سری ظاهر شده در عبارت آخر را می‌توانیم با سری $\zeta(2)$ بدست آوریم. ابتدا دقت می‌کنیم که:

$$\begin{aligned}\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\\ &= \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\\ &\Longrightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned} \tag{۷۶}$$

پس جمع ظاهر شده در ۷۵ عبارت است از:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\\ &= -\frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned} \tag{۷۷}$$

و در نتیجه:

$$ln\, Z \simeq \frac{\pi^2 FkT}{12\hbar\omega_0}. \tag{۷۸}$$

حال انتروپی را برای سیستم فرمیونی می‌نویسیم:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}(kT\, ln\, Z) \simeq \frac{\pi^2 Fk^2 T}{6\hbar\omega_0}. \tag{۷۹}$$

برای تخمین $ln\, q(E)$ باید انتروپی را برحسب انرژي بنویسیم:

$$\begin{aligned}&E = -\frac{\partial ln\, Z}{\partial \beta} \simeq \frac{\pi^2 Fk^2T^2}{12\hbar\omega_0}\ \Longrightarrow\ T = \sqrt{\frac{12\hbar\omega_0}{\pi^2 Fk^2}E},\\ &\Longrightarrow\ S \simeq k\pi\sqrt{\frac{FE}{3\hbar\omega_0}} = k\pi\sqrt{\frac{1}{3}NF}.\end{aligned} \tag{۸۰}$$

حال از $S(E) = k\, ln\, q(E)$ تخمینی برای تعداد پارش‌ها داریم:

$$ln\, q(N) \simeq \pi\sqrt{\frac{1}{3}NF}. \tag{۸۱}$$

در این‌جا به سادگی می‌توان نتیجه قبل در ۶۹ را به تعداد پارش‌های یک ریسمان غیرنسبیتی با B مود بوزونی و F مود فرمیونی تعمیم داد:

$$\begin{aligned} &P(N;B,F) = P(N;B) \times q(N) \\ \Longrightarrow\ &ln\, P(N;B,F) = ln\, P(N;B) + ln\, q(N) \simeq \pi\sqrt{N\left(\frac{1}{3}F + \frac{2}{3}B\right)}. \end{aligned} \tag{۸۲}$$

۳.۳ دما و انتروپی ریسمان نسبیتی

از این پس توجه خود را به ریسمان‌های نسبیتی معطوف می‌کنیم. اما قبل از احتساب تابع پارش ریسمان‌ها با تکانه فضایی، ریسمان‌های باز و بسته با تکانه فضایی صفر را مطالعه می‌کنیم که انرژی آن‌ها تنها با جرم ارتباط دارد. در این چارجوب به دلیل ارتباط خطی انتروپی و انرژی با دمای هگدورن روبرو خواهیم شد که پیش‌تر درباره آن گفته بودیم.

۱.۳.۳ ریسمان‌های بوزونی

ریسمان بوزونی در فضازمان $(1+25)$-بعدی را متصور می‌شویم. با استفاده از تبدیلات لوژاندر و نوشتن کنش در پیمانه استاتیک $t = \tau$ می‌توان همیلتونی و در نتیجه انرژي را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$E^2 = M^2 - \vec{p}^2, \tag{۸۳}$$

که در آن $\vec{p}^2$ تکانه فضایی ریسمان است. اگر ریسمان تکانه فضایی نداشته باشد، آن‌گاه داریم:

$$E^2 = M^2 \tag{۸۴}$$

از طرفی، جرم ریسمان در رابطه زیر ظاهر می‌شود:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(N-1). \tag{۸۵}$$

در نتیجه انرژي با تعداد برانگیختگی‌ها مرتبط است:

$$\sqrt{N-1} = \sqrt{\alpha'}E. \tag{۸۶}$$

اگر حد N بزرگ را در نظر بگیریم، در رابطه بالا می‌توان از 1 صرف نظر کرد: $\sqrt{N} = \sqrt{\alpha'}E$. حال که انرژی با جرم مرتبط است و جرم با عملگر تعداد مشخص می‌شود، اگر آنسامل میکروکانونیک را در نظر بگیریم، تعداد

حالات با انرژي مشخص، $\Omega(E)$ با تعداد پارش‌ها، یعنی $P(N;B=24)$ بدست می‌آید. در نتیجه انتروپی با رابطه $S(E)=k\,ln\,P(N;B=24)$ داده می‌شود. در حد انرژی بالا که معادل با تعداد زیاد است، می‌توانیم از ۶۹ استفاده کنیم:

$$S=k\,ln\,P(N;B=24)\simeq 4k\pi\sqrt{N}. \qquad (۸۷)$$

حال با استفاده از $\sqrt{N}=\sqrt{\alpha'}E$، داریم:

$$S(E)=4k\pi\sqrt{\alpha'}E. \qquad (۸۸)$$

این رابطه‌ی انتروپی-انرژي در انرژي بالاست. انتروپی متناسب با انرژی معمول نیست، چراکه به دمای ثابت می‌انجامد:

$$\frac{1}{kT}=\frac{1}{k}\frac{\partial S}{\partial E}=4\pi\sqrt{\alpha'} \implies T_H=\frac{1}{4k\pi\sqrt{\alpha'}}. \qquad (۸۹)$$

این دما را دمای هگدورن می‌نامیم، چرا که به نظریه همان خواصی را می‌دهد که دمای هگدورن به مدل هادرون‌ها می‌داد. در بالا دیدیم که این دما نتیجه ارتباط خطی انرژی و انتروپی است. تعبیر فیزیکی آن این است که ریسمان‌ها با یک انرژی گرمایی ثابت kT_H مقید شده‌اند، یعنی هر قدر انرژي را افزایش دهیم، و در نتیجه انتروپی را، همواره دما ثابت خواهد بود. لازم به ذکر است که این انرژي گرمایی ثابت نسبت به انرژي اولین برانگیختگی‌های جرم‌دار ریسمان ناچیز است. برای مثال اگر انرژي اولین برانگیختگی جرم‌دار برای تراز دوم یک ریسمان را بررسی کنیم، داریم:

$$N=2, M^2=\frac{1}{\alpha'} \implies \frac{M}{kT_H}=4\pi\simeq 12.6. \qquad (۹۰)$$

این نتیجه در ادامه برای ما اهمیت خواهد داشت. اکنون به سراغ ریسمان بوزونی بسته می‌رویم. اگر باز هم فرض کنیم که تکانه فضایی صفر است، می‌توانیم روابط مشابه ریسمان باز بدست آوریم. به یاد می‌آوریم که عملگر جرم برای ریسمان‌های بسته با ترکیب مودهای راست‌رو[۲۹] و چپ‌رو[۳۰] بدست می‌آید. اگر باز هم فرض انرژی بالا را اعمال کنیم داریم:

$$M^2=\frac{2}{\alpha'}(N+\tilde{N}-2)\simeq\frac{2}{\alpha'}(N+\tilde{N}), \qquad (۹۱)$$

که در بالا N و $\tilde{N}$ به ترتیب عملگرهای تعداد برای مودهای چپ‌رو و راست‌رو هستند. همچنین شرط تطبیق تراز[۳۱] را داریم: $N=\tilde{N}$ پس می‌نویسیم:

$$M^2\simeq\frac{4}{\alpha'}N \implies E^2\simeq\frac{4N}{\alpha'}. \qquad (۹۲)$$

---

[۲۹] right moving
[۳۰] left moving
[۳۱] level-matching

تعداد میکروحالات این بار از ضرب تعداد پارش‌های راست‌رو و چپ‌رو بدست می‌آید:

$$\Omega(E) = P(N; B = 24)P(\tilde{N}; B = 24) = P(N; B = 24)^2. \quad (۹۳)$$

با تکرار مراحل قبل انتروپی را محاسبه می‌کنیم:

$$S = 2k\, ln\, P(N; B = 24) \simeq 8k\pi\sqrt{N}. \quad (۹۴)$$

پس انتروپی ریسمان بسته دوبرار حالت باز است. با استفاده از ۹۲ رابطه انرژی-انتروپی بدست می‌آید:

$$S(E) = 4k\pi\sqrt{\alpha'}E. \quad (۹۵)$$

و دمای هگدورن محاسبه می‌شود:

$$T_H = \frac{1}{4k\pi\sqrt{\alpha'}}. \quad (۹۶)$$

پس وقتی انتروپی برحسب انرژي محاسبه شود نتایج مشابه ریسمان باز خواهد بود و در نتیجه دمای هگدورن ریسمان بوزونی باز و بسته یکسان است. برحسب انرژی گرمایی تفاوتی بین این دو ریسمان وجود ندارد.

۲.۳.۳ ابرریسمان‌ها

برای ابرریسمان باز، فضای حالات به دو ناحیه تقسیم می‌شود: ناحیه نوو-شوارتز[۳۲] (NS) که شامل حالات بوزونی است (شرایط مرزی غیر دوره‌ای) و ناحیه راموند[۳۳] (R) که شامل حالات فرمیونی است (شرایط مرزی دوره‌ای). از آنجا که ابرتقارن ابعاد فضا را به 10 می‌کاهد، این‌بار 8 مود عرضی نوسانی داریم. پس برای شمارش پارش‌ها لازم است از $P(N; B = 8, F = 8)$ استفاده کنیم. اما این‌بار باید دقت کنیم که حالات پایه دارای تبهگنی هستند. برای انتخاب حالات فرمیونی در نظریه ابرریسمان باز ار ناحیه R، R^- را انتخاب می‌کنیم که می‌دانیم [۱۲] در آن حالت پایه دارای 8 حالت تبهگن است. در نظریه ابرریسمان باز برای انتخاب حالات بوزونی بخش NS^+ را انتخاب می‌کنیم و به دلیل آن‌که نظریه ما ابرمتقارن است این تبهگنی برای حالات پایه این ناحیه نیز وجود دارد. پس در مجموع در هر تراز 16 حالت تبهگن خواهیم داشت و تعداد کل حالات $16P(N; B = 8, F = 8)$ است. مانند قبل فرض می‌کنیم ریسمان‌ها تکانه فضایی ندارند. در نتیجه انرژي آن‌ها با جرم داده می‌شود. در ناحیه NS عملگر جرم را داریم:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\left(N - \frac{1}{2}\right). \quad (۹۷)$$

و معادلا در ناحیه R:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}N. \quad (۹۸)$$

---

[۳۲] Neveu-Schwarz

[۳۳] Ramond

اگر حد انرژي بالا را در نظر بگیریم این دو ناحیه رفتار یکسانی خواهند داشت: $N \simeq \alpha' E^2$. حال با آنسامل میکروکانونیک انتروپی را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S = k\, ln\, \Omega(E) &= k\, ln\, 16P(N; B=8, F=8) \\ &\simeq k(2\sqrt{2}\pi\sqrt{N} + 4ln\, 2) \\ &\simeq 2\sqrt{2}k\pi\sqrt{\alpha'}E, \end{aligned} \tag{۹۹}$$

که در خط دوم در بالا از ۸۲ و در خط سوم از حد انرژي بالا استفاده کردیم. حال دمای هگدورن را برای ابرریسمان باز محاسبه می‌کنیم:

$$T_H = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}k\pi\sqrt{\alpha'}}. \tag{۱۰۰}$$

همان‌طور که می‌بینیم دمای هگدورن برای ابرریسمان باز $\sqrt{2}$ برابر ریسمان بوزونی است.

حال به سراغ ابرریسمان بسته می‌رویم. در این حالت شرایط اندکی پیچیده‌تر است چرا که این‌بار باید مودهای چپ‌رو و راست‌رو را لحاظ کرد. در نظریه ابرریسمان‌های بسته چهار ناحیه داریم، دو ناحیه $\{(R,R),(NS,NS)\}$ که حالات بوزونی بدست می‌دهند و دو ناحیه $\{(NS,R),(R,NS)\}$ که حالات فرمیونی بدست می‌دهند(در پرانتزها $(.,.)$ ورودی سمت چپ برای مودهای چپ‌رو و ورودی سمت راست برای مودهای راست‌رو است). برای ساخت نظریه ریسمان بسته نواحی R و NS را شاخه می‌کنیم. یعنی نواحی را به شاخه‌ها با تعداد حالات یکسان تقسیم می‌کنیم. به طور مثال برای ساخت نظریه ریسمان نوع IIA شاخه سازی خود را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$left\ \ sector:\ \begin{Bmatrix} NS_+ \\ R_- \end{Bmatrix},\quad right\ \ sector:\ \begin{Bmatrix} NS_+ \\ R_+ \end{Bmatrix}. \tag{۱۰۱}$$

، در نتیجه نواحی $\{(NS_+,R_+),(R_-,NS_+)\}$ بوزونی و نواحی $\{(R_-,R_+),(NS_+,NS_+)\}$ فرمیونی را داریم. برای یافتن نظریه نوع IIB باید در شاخه کردن در هردو مود، شاخه R_- را برداریم و در نتیجه برای نوع IIB نواحی $\{(NS_+,R_-),(R_-,NS_+)\}$ بوزونی و نواحی $\{(R_-,R_-),(NS_+,NS_+)\}$ فرمیونی را داریم.

برای شمارش کل حالات به یاد می‌آوریم که با شاخه کردن تعداد حالات نصف می‌شود. یعنی به طور مثال شاخه NS_+ یا NS_- از NS تعداد حالات برابر و به اندازه نصف حالات NS دارند. با این اوصاف برای ناحیه (NS_+,NS_+) داریم:

$$\begin{aligned} \Omega(NS_+,NS_+) = \left(\frac{1}{2}\Omega(NS)\right)\left(\frac{1}{2}\Omega(NS)\right) &= \frac{1}{4}\Omega(NS)^2 \\ &= \frac{1}{4}(16P(N;B=8,F=8)) \\ &= 64(P(N;B=8,F=8))^2, \end{aligned} \tag{۱۰۲}$$

که در خط دوم در بالا از بحث خود در مورد تعداد پارش‌های ابرریسمان‌های باز استفاده کردیم. مشابه قبل حد دمای بالا را متصور می‌شویم و انرژی با جرم داده می‌شود که برای ابرریسمان باز عبارت است از:

$$\frac{1}{2}\alpha' M^2 = \alpha' M_L^2 + \alpha' M_R^2. \qquad (۱۰۳)$$

حد انرژي بالای جرم ناحیه NS و R هم همانطور که پیش‌تر گفته بودیم عبارت است از:

$$M^2_{L\,or\,R} \simeq \frac{1}{\alpha'} N. \qquad (۱۰۴)$$

که با شرط تطبیق تراز $M_L = M_R$ برای مودهای راست‌رو و چپ‌رو و جای‌گذاری در ۱۰۳ بدست می‌دهد:

$$\frac{1}{2}\alpha' M^2 = 2N \implies M^2 \simeq \frac{4}{\alpha'} N. \qquad (۱۰۵)$$

در نتیجه در این حالت داریم: $N \simeq \frac{1}{4}\alpha' E^2$ و با ۸۲ و ۱۰۲ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} S = k\, ln\, \Omega(E) &= k\, ln\, 4 \times 64 (P(N; B=8, F=8))^2 \\ &\simeq k\,(4\sqrt{2}\pi\sqrt{N} + 8\, ln\, 2) \\ &\simeq 2\sqrt{2} k\pi\sqrt{\alpha'} E. \end{aligned} \qquad (۱۰۶)$$

در تساوی اول دقت شد که تعداد پارش‌ها در لگاریتم ضرب در 4 شد، چراکه باید تمام چهار ناحیه

$$\{(NS_+, NS_+), (R_-, R_+), (NS_+, R_+), (R_-, NS_+)\}, \qquad (۱۰۷)$$

را در ابرریسمان نوع IIA لحاظ کرد. به طور واضح محاسبات در نوع IIB مشابه است. حال که انتروپی را داریم می‌توانیم دمای هگدورن را محاسبه کنیم:

$$T_H = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}k\pi\sqrt{\alpha'}}. \qquad (۱۰۸)$$

پس مشابه ریسمان‌های بوزونی اگر دمای هگدورن و انتروپی را برحسب انرژي بنویسیم نتیجه ابرریسمان باز و بسته یکی می‌شود.

۴.۳ تابع پارش ریسمان‌ها

در این بخش به محاسبه تابع پارش ریسمان‌ها می‌پردازیم. در اینجاست که مشخص می‌شود نامگذاری دمای هگدورن برای دمایی که با آنسامل میکروکانونیک بدست آوردیم واقعا به دلیل کران‌دار بودن دما با دمای هگدورن است.

ابتدا تابع پارش ذرات نسبیتی را یادآوری می‌کنیم. یک ذره در فضای تخت $d+1$ بعدی متصور می‌شویم که در یک جعبه با حجم V قرار دارد:

$$V = L_1 L_2 ... L_d. \tag{۱۰۹}$$

جعبه با یک منبع گرمایی در دمای T در تعادل است. انرژي ذره نیز با رابطه آشنای نسبیتی $E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ داده می‌شود. شرایط آنسامل کانونیک برقرار است و تابع پارش را داریم:

$$Z(m^2) = \sum_{\vec{p}} exp(-\beta E(\vec{p})). \tag{۱۱۰}$$

با توجه به مقید بودن ذره در جعبه مودهای نوسانی گسسته هستند:

$$k_i L_i = 2\pi n_i, \;\; i = 1, 2, ..., d, \;\; n_i \in \mathbb{Z}. \tag{۱۱۱}$$

و به طور معادل بر حسب تکانه داریم:

$$n_i = p_i \frac{L_i}{2\pi\hbar}. \tag{۱۱۲}$$

پس تابع پارش را می‌توان به طور معادل بر حسب مودهای نوسانی نوشت و یا به طور کلی‌تر برای یک تابع هموار بر حسب انرژی:

$$\sum_{\vec{p}} f(E(\vec{p})) = \sum_{\vec{n}} f(E(\vec{p}(\vec{n}))) \simeq \int dn_1 dn_2 ... dn_d f(E(\vec{p}(\vec{n}))). \tag{۱۱۳}$$

تقریب جمع با انتگرال مجاز است اگر اندازه ابعاد جعبه را خیلی بزرگ بگیریم. در این صورت تغییرات تکانه با افزایش مودهای n_i خیلی کوچک خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$\sum_{\vec{p}} f(E(\vec{p})) \simeq V \int \frac{d^d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^d} f(E(\vec{p})). \tag{۱۱۴}$$

حال به طور مشابه برای تابع پارش ذره، نسخه بالا را پیاده می‌کنیم:

$$Z(m^2) = V \int \frac{d^d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^d} exp(-\beta\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}). \tag{۱۱۵}$$

با انتخاب واحد $\hbar = 1$ و تغییر متغیر $\vec{p} = m\vec{u}$ داریم:

$$Z(m^2) = V m^d \int \frac{d^d\vec{u}}{(2\pi)^d} exp(-\beta m\sqrt{1 + \vec{u}^2}) \tag{۱۱۶}$$

انتگرال بالا را می‌توان برحسب توابع بسل نوشت اما ما با تقریبی مناسب کار را راحت‌تر می‌کنیم. پیش‌تر اشاره کردیم که نسبت انرژی گرمایی و انرژی سکون ذرات در محدوده‌های انرژی مد نظر ما در نظریه ریسمان، خیلی

کوچک است. به طور مثال برای اولین بر انگیختگی در معادله ۹۰ این را بررسی کردیم. در نتیجه فرض می‌کنیم نسبت جرم به دما برای ذره نسبیتی مد نظر خیلی بزرگ است:

$$\beta m \gg 1. \qquad (۱۱۷)$$

حال مدعی می‌شویم که مرتبه اول تقریب برای انتگرال بالا با بسط دادن جذر داخل تابع نمایی قابل محاسبه است. به مختصات کروی می‌رویم: $\vec{u}^2 = u^2$ و $d^d\vec{u} \sim u^{d-1}du$. حال انتگرال‌ده به صورت زیر خواهد بود:

$$integrand \sim u^{d-1}e^{-\beta m\sqrt{1+u^2}}. \qquad (۱۱۸)$$

انتگرال ده در $u = 0$ و $u \to \infty$ به صفر میل می‌کند و در این بین فرینه می‌شود. نقطه فرینه با مشتق صفر بدست می‌آید که به شرط زیر می‌انجامد:

$$\frac{d-1}{\beta m} = \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}. \qquad (۱۱۹)$$

از آن‌جایی که در حد مد نظر ما، مخرج در عبارت سمت چپ ناچیز است، u^2 در عبارت سمت راست نیز باید کوچک باشد. پس می‌توانیم از u^2 در جذر داخل مخرج صرف نظر کنیم و ادعا کنیم انتگرال‌ده در

$$u^2 \simeq \frac{d-1}{\beta m} \ll 1, \qquad (۱۲۰)$$

بیشینه است. پس می‌توانیم جذر داخل نمایی را با فرض کوچک بودن u^2 بسط دهیم:

$$Z(m^2) \simeq V m^d e^{-\beta m} \int \frac{d^d\vec{u}}{(2\pi)^d} exp(-\frac{1}{2}\beta m\vec{u}^2). \qquad (۱۲۱)$$

حال یک انتگرال گاوسی داریم که به سادگی قابل محاسبه است:

$$Z(m^2) \simeq V e^{-\beta m}\left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{\frac{d}{2}}. \qquad (۱۲۲)$$

نتیجه بالا را در محاسبه تابع پارش ریسمان به کار خواهیم برد.

حال به سراغ یک ریسمان باز بوزونی در یک جعبه با حجم $V = \prod_{i=1}^{d} L_i$ می‌رویم که در تعادل با منبع با دمای T است. حالات کوانتومی ریسمان با تکانه p و اعداد اشغال $\lambda_{n,i}$ مشخص می‌شوند. این حالات به صورت زیر با عملگرهای خلق ساخته می‌شوند:

$$|\lambda, p\rangle = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{i=2}^{25}(a_n^{i\dagger})^{\lambda_{n,i}}\,|p^+, \vec{p}_T\rangle\,. \qquad (۱۲۳)$$

حال جرم را داریم:

$$M(\{\lambda_{n,i}\}) = -p^2 = 2p^+p^- - p^ip^i, \qquad (۱۲۴)$$

که در آن:

$$M^2(\{\lambda_{n,i}\}) = \frac{1}{\alpha'}(N-1), \quad N = \sum_{n,i} n\lambda_{n,i}. \qquad (۱۲۵)$$

در این صورت می‌توانیم انرژي منسوب به حالات را نیز مشخص کنیم:

$$E(\{\lambda_{n,i}\}, \vec{p}) = \sqrt{M^2(\{\lambda_{n,i}\}) + \vec{p}^2}. \qquad (۱۲۶)$$

دقت می‌کنیم که بر خلاف محاسبات خود برای محاسبه دمای هگدورن و انتروپی در بخش قبل، این‌جا دیگر فرض صفر بودن تکانه فضایی را لازم نداریم. با این مقدمات تابع پارش قابل محاسبه است:

$$Z_{str} = \sum_{\lambda_{n,i}} \sum_{\vec{p}} exp\Big(- \beta\sqrt{M^2(\{\lambda_{n,i}\}) + \vec{p}^2}\Big). \qquad (۱۲۷)$$

جمع روی تکانه‌ها تابع پارش یک ذره نسبیتی را بدست می‌دهد:

$$Z_{str} = \sum_{\lambda_{n,i}} Z(M^2(\{\lambda_{n,i}\})). \qquad (۱۲۸)$$

از آن‌جایی که M^2 تنها به N مرتبط است، باید بتوان جمع روی $\{\lambda_{n,i}\}$ را به جمع روی N تبدیل کرد. فقط باید دقت کنیم که برای حالت ریسمان بوزونی مد نظر ما تبهگنی $P(N; B = 24)$ باید لحاظ شود:

$$Z_{str} = \sum_{N=0}^{\infty} P(N; B = 24) Z(M^2(N)). \qquad (۱۲۹)$$

لازم به ذکر است که تا به این‌جای کار در محاسبه تابع پارش ریسمان بوزونی، تقریبی نزده‌ایم و نتیجه بالا دقیق است.

فرض می‌کنیم که N_0 طوری انتخاب شود که برای $N > N_0$، $P(N; B = 24)$ با تقریب خوبی با ۷۰ داده شود. آنگاه تابع پارش را دو بخش می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Z_{str} &= \sum_{N=0}^{N_0-1} P(N; B = 24) Z(M^2(N)) + \sum_{N_0}^{\infty} P(N; B = 24) Z(M^2(N)) \\ &= Z_0 + \sum_{N_0}^{\infty} P(N; B = 24) Z(M^2(N)). \end{aligned} \qquad (۱۳۰)$$

محاسبه Z_0 چندان ساده نیست و روش ما در محدوده‌ای معتبر است که بتوان از این جمله نسبت به جمله دوم صرف نظر کرد. خواهیم دید که این محدوده، محدوده‌ای است که دمای ریسمان به دمای هگدورن میل کند. برای فراتر رفتن جمع را با انتگرال جایگزین می‌کنیم:

$$Z_{str} \simeq Z_0 + \int_{N_0}^{\infty} dN P(N; B = 24) Z(M^2(N)). \qquad (۱۳۱)$$

متغیر انتگرال را به جرم تغییر می‌دهیم و از چگالی جرمی استفاده می‌کنیم به طوری که:

$$P(N; B = 24)dN = \rho(M)dM. \tag{۱۳۲}$$

اگر فرض کنیم N_0 بزرگ است می‌توانیم بگیریم $\alpha' M^2 \simeq N$ و در نتیجه:

$$dN = 2\alpha' M dM = 2(\sqrt{\alpha'}M)d(\sqrt{\alpha' M}). \tag{۱۳۳}$$

همچنین با توجه به دمای هگدورن برای ریسمان بوزونی $\frac{1}{\beta_H} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\alpha'}}$ و ۷۰ تعداد پارش‌ها را داریم:

$$P(N; B = 24) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\alpha'}M)^{-27/2}exp(\beta_H M). \tag{۱۳۴}$$

با کنار هم گذاشتن عبارات بالا در ۱۳۲ می‌نویسیم:

$$\rho(M)dM = \sqrt{2}(\sqrt{\alpha'}M)^{-25/2}exp(\beta_H M)d(\sqrt{\alpha'}M). \tag{۱۳۵}$$

این بدان معناست که:

$$\rho(M) \sim M^{-25/2}exp(\beta_H M), \tag{۱۳۶}$$

که بیان می‌کند که رشد نمایی چگالی حالات با دمای هگدورن کنترل می‌شود. حال تابع پارش را باز نویسی می‌کنیم:

$$Z_{str} \simeq Z_0 + \sqrt{2}\int_{M_0 = N_0/\alpha'}^{\infty}(\sqrt{\alpha'}M)^{-25/2}exp(\beta_H M)Z(M^2)d(\sqrt{\alpha'}M). \tag{۱۳۷}$$

تابع پارش ذره نسبیتی ۱۲۲ را با اعمال

$$\frac{M}{2\pi\beta} = 2(\sqrt{\alpha'}M)kTkT_H, \quad \beta M = 4\pi(\sqrt{\alpha'}M)\frac{T_H}{T}, \tag{۱۳۸}$$

به صورت زیر داریم:

$$Z(M^2) \simeq 2^{25/2}V(kTkT_H)^{25/2}(\sqrt{\alpha'}M)^{25/2}exp(-4\pi\sqrt{\alpha'}M\frac{T_H}{T}). \tag{۱۳۹}$$

حال این عبارت را در تابع پارش ریسمان قرار می‌دهیم:

$$Z_{str} \simeq Z_0 + 2^{13}V(kTkT_H)^{25/2}\int_{M_0}^{\infty}d(\sqrt{\alpha'}M)exp\Bigg(-4\pi\sqrt{\alpha'}M\Bigg(\frac{T_H}{T} - 1\Bigg)\Bigg). \tag{۱۴۰}$$

با تغییر متغیر $x = \sqrt{\alpha'}M$:

$$Z_{str} \simeq Z_0 + 2^{13}V(kTkT_H)^{25/2}\int_{\sqrt{N_0}}^{\infty}exp\Bigg(-4\pi x\Bigg(\frac{T_H}{T} - 1\Bigg)\Bigg). \tag{۱۴۱}$$

این انتگرال تنها برای $T < T_H$ هم‌گرا است. این چیزی است که از دمای هگدورن انتظار می‌رفت. در نتیجه دمای ظاهر شده در محاسبات ما واقعا خاصیت‌های دمای هگدورن را دارد. در بازه $T < T_H$ تابع پارش برابر است با:

$$Z_{str} \simeq Z_0 + \frac{2^{11}}{\pi} V(kTkT_H)^{25/2}\bigg(\frac{T}{T_H - T}\bigg) exp\bigg(-4\pi\sqrt{N_0}\bigg(\frac{T_H}{T} - 1\bigg)\bigg). \quad (۱۴۲)$$

در حد $T \to T_H$ از پایین، تابع نمایی به 1 میل می‌کند. ضریب نمایی هم بسیار بزرگ می‌شود. در چنین حدی تابع پارش با تقریب خوبی برابر است با:

$$Z_{str} \simeq \frac{2^{11}}{\pi} V(kTkT_H)^{25/2}\bigg(\frac{T}{T_H - T}\bigg), \quad T \to T_H. \quad (۱۴۳)$$

عبارت بالا محاسبه نهایی ما برای تابع پارش ریسمان بوزونی در جعبه است.

۴ توصیف کیفی انتروپی سیاه‌چاله با نظریه ریسمان

در این فصل نشان می‌دهیم که انتروپی سیاه‌چاله شوارزشیلد در هر بعد به طور کیفی با استفاده از نظریه ریسمان قابل توجیه است. برای این‌کار به طور عمده محاسبات و ایده‌های ساسکیند[۳۴] [۵] [۱۴] را دنبال می‌کنیم و با بررسی ولگشت[۳۵] یک ریسمان بلند به طور کیفی نشان می‌دهیم که شمارش حالات با رفتار انتروپی سیاه‌چاله شوارزشیلد سازگار است. توصیف کمی درجه آزادی‌های سیاه‌چاله‌ها در سیاه‌چاله‌های ابرگرانشی انجام شده است که در فصل بعد به آن‌ها خواهیم پرداخت.

۱.۴ افق کشیده و قطع فرابنفش

در این بخش، مدل ساده میدان اسکالر در خارج یک سیاه‌چاله شوارزشیلد $(3+1)$-بعدی را انجام می‌دهیم و سپس با استفاده از مختصات در نزدیکی افق(مختصات ریندلر[۳۶]) نشان می‌دهیم که انتروپی نظریه میدان اسکالر مد نظر تنها زمانی متناهی و سازگار با انتروپی بکنستاین-هاوکینگ می‌شود، که یک قطع فرابنفش[۳۷] برای نظریه در نزدیکی افق در نظر بگیریم. سطحی که در این فاصله قطع از افق قرار دارد را افق کشیده[۳۸] می‌نامیم. افق کشیده به طور عمده در بحث‌های حل پارادوکس اطلاعات سیاه‌چاله مد نظر است که در این مقاله مورد بحث نیست اما خواهیم دید که این سطح چگونه در تحول ریسمان بلندی که پیش‌تر به آن اشاره کردیم نیز ظاهر می‌شود.

برای آغاز محاسبات مد نظر، ابتدا متریک شوارزشیلد $(3+1)$-بعدی را که در فصل دوم بررسی کردیم، یادآوری می‌کنیم:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \tag{۱۴۴}$$

در مختصات بالا می‌توانیم فاصله ویژه شعاعی را برای هر نقطه خارج افق رویداد حساب کنیم:

$$\begin{aligned}\rho &= \int_{2MG}^{r} \sqrt{g_{rr}(r')}dr' \\ &= \int_{2MG}^{r} \left(1 - \frac{2MG}{r'}\right)^{-\frac{1}{2}} dr' \\ &= \sqrt{r(r-2MG)} + 2MG\, sinh^{-1}(\sqrt{\frac{r}{2MG} - 1}).\end{aligned} \tag{۱۴۵}$$

حال برحسب ρ می‌توانیم متریک را بازنویسی کنیم:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{r(\rho)}\right)dt^2 + d\rho^2 + r(\rho)^2 d\Omega_2^2. \tag{۱۴۶}$$

---

[۳۴] Susskind
[۳۵] random walk
[۳۶] Rindler
[۳۷] UV cut-off
[۳۸] stretched horizon

در نزدیکی افق($r \to 2MG$)، ρ را با استفاده از ۱۴۵ تقریب می‌زنیم:

$$\rho \approx 2\sqrt{2MG(r-2MG)}. \tag{۱۴۷}$$

جای‌گذاری تقریب بالا در متریک نمایش زیر را بدست می‌دهد:

$$ds^2 \simeq -\rho^2\left(\frac{dt}{4MG}\right)^2 + d\rho^2 + r^2(\rho)d\Omega_2^2. \tag{۱۴۸}$$

اگر در نزدیکی افق به ناحیه‌ای با تغییرات θ کوچک حول $\theta = 0$ را مد نظر داشته باشیم، می‌توانیم در مختصات کروی $sin\theta \approx \theta$ بگیریم و مختصات دکارتی زیر را برای بخش زاویه‌ای متریک تعریف کنیم:

$$x = 2MG\theta\ cos\phi, \quad y = 2MG\theta\ sin\phi. \tag{۱۴۹}$$

در نهایت با معرفی یک زمان بی‌بعد $\omega = \frac{t}{4MG}$، متریک به فرم زیر در می‌آید:

$$ds^2 = -\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2 + dx^2 + dy^2. \tag{۱۵۰}$$

به هردو فرم نزدیک افق ۱۴۸ و ۱۵۰ نمایش مختصات ریندلر گویند. خواننده‌ای که با حرکت ناظر شتاب‌دار در نسبیت خاص آشنا باشد، متوجه می‌شود که متریک ریندلر نمایش متریک مینکوفسکی در مختصات ناظر شتاب‌دار است. پس می‌توان فیزیک نزدیک افق سیاه‌چاله را مشابه فیزیک ناظر شتاب‌دار دانست.
حال به بررسی یک میدان اسکالر χ در نزدیکی افق می‌پردازیم. برای این‌کار یک تغییر مختصه دیگر $u = ln\ \rho$ را در نظر می‌گیریم. متریک به فرم زیر در خواهد آمد:

$$ds^2 = exp(2u)(-d\omega^2 + du^2) + dx^2 + dy^2. \tag{۱۵۱}$$

در چنین مختصاتی کنش میدان اسکالر را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi\ d^4x \\ &= -\frac{1}{2}\int e^{2u}\left(- e^{-2u}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\omega}\right)^2 + e^{-2u}\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2\right) d^4x \\ &= \frac{1}{2}\int dx\ dy\ du\ d\omega\ \left(\left(\frac{\partial\chi}{\partial\omega}\right)^2 - \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2 - e^{2u}(\partial_\perp\chi)^2\right), \end{aligned} \tag{۱۵۲}$$

که در بالا $\partial_\perp = (\partial_x, \partial_y)$ مشتق گیری از مختصات x و y را خلاصه می‌کند. در ادامه میدان را برحسب امواج عرضی بسط می‌دهیم:

$$\chi = \int d^2k_\perp e^{i\,k_\perp x_\perp}\chi(k_\perp, \omega, u). \tag{۱۵۳}$$

حال برای هر بردار موج $\vec{k} = k_\perp = (k_x, k_y)$ می‌توان با جای‌گذاری بسط بالا در کنش، کنش متناسب با آن بردار موج را خواند:

$$I = \frac{1}{2}\int d\omega du((\partial_\omega \chi_{\vec{k}})^2 - (\partial_u \chi_{\vec{k}})^2 - k^2 e^{2u}\chi_{\vec{k}}^2). \qquad (۱۵۴)$$

با وردش گیری از کنش بالا می‌توان معادله تحول هر مود $\vec{k}$ را یافت:

$$\partial_\omega^2 \chi_{\vec{k}} - \partial_u^2 \chi_{\vec{k}} + k^2 exp(2u)\chi_{\vec{k}} = 0. \qquad (۱۵۵)$$

با جداسازی متغیرها می‌توان بخش زمانی را به صورت $e^{i\lambda\omega}$ جدا کرد و معادله بخش مستقل از زمان به صورت زیر در می‌آید:

$$-\frac{\partial^2 \chi_{\vec{k}}}{\partial u^2} + (k^2 e^{2u})\chi_{\vec{k}} = \lambda^2 \chi_{\vec{k}}. \qquad (۱۵۶)$$

پس بخش مستقل از زمان هر مد یک نوسان‌گر تحت تاثیر پتانسیل $V = k^2 e^{2u}$ است. برای کوانتش این میدان لازم است که شرایط مرزی مساله مشخص باشند. باید یک شرط مرزی برای $u \to -\infty$ تعیین کنیم. ساده‌ترین راه انتخاب یک نقطه قطع $u_0 = ln\, \epsilon$ است، که در آن نقطه میدان صفر می‌شود. پارامتر ϵ فاصله ویژه نقطه قطع از افق را نمایش می‌دهد. با نگاه فیزیکی ما با اعمال این شرط، یک آینه با بازتاب کامل در فاصله ϵ از افق قرار داده‌ایم. در انتها می‌توان با حد $u_0 \to -\infty$ این نقطه قطع را از بین برد.
با نگاه به ۱۵۶ می‌توان دید که هر مود عرضی را می‌توان به چشم یک میدان کوانتومی $(1+1)$-بعدی در جعبه نگاه کرد. یک دیواره جعبه در نقطه قطع آینه‌ای $u = u_0 = ln\, \epsilon$ قرار دارد. دیواره دیگر با پتاسیل

$$V(u) = k^2\, exp(2u), \qquad (۱۵۷)$$

داده شده است. مقدار این پتانسیل در $u > -ln\, |\vec{k}|$ بزرگ می‌شود. با این تفاسیر پتانسیل را با یک دیوار دوم در $u = u_1 = -ln\, |\vec{k}|$ تقریب می‌زنیم. حال طول جعبه قابل محاسبه است:

$$L(\vec{k}) = u_1 - u_0 = -ln\, (\epsilon|\vec{k}|). \qquad (۱۵۸)$$

در نتیجه برای هر مود کوانتش به کوانتش یک نوسان‌گر هماهنگ با فرکانس λ کاهش می‌یابد، میدان را برحسب عملگرهای خلق و فنا بسط می‌دهیم:

$$\chi_{\vec{k}}(u) = \sum_n (a^\dagger(n,\vec{k}) f_{n,\vec{k}}(u) + a(n,\vec{k}) f^*_{n,\vec{k}}(u)). \qquad (۱۵۹)$$

دقت می‌کنیم که بسط بالا یه صورت گسسته شد جراکه نظریه میدان مد نظر در یک جعبه است. همیلتونی کامل میدان با ملاحظات بالا به جمع همیلتونی نوسان‌گرها برای هر مود و سپس انتگرال روی تمام مود ها تبدیل می‌شود:

$$H = \int d^2k \sum_n \lambda(n,\vec{k}) a^\dagger(n,\vec{k}) a(n,\vec{k}). \qquad (۱۶۰)$$

در این‌جا محاسبات هاوکینگ در ۲۷ را به خاطر می‌آوریم و مقدار چشم‌داشتی عملگر تعداد را برای هر مود می‌نویسیم:

$$\langle N(n,\vec{k})\rangle = \frac{1}{exp(2\pi\lambda(n,\vec{k}))-1}. \tag{۱۶۱}$$

دقت می‌کنیم که در بالا دمای تمام مودها تا حد یک ثابت بعد دار برابر با $T=\frac{1}{2\pi}$ شده است. دلیل تفاوت نتیجه بالا با دمای محاسبه شده توسط هاوکینگ استفاده از مختصات ریندلر است که تنها در نزدیکی افق معتبر هستند.
با توجه به توزیع بالا می‌توانیم انتروپی را به محاسبه انتروپی یک گاز بوزونی بی‌جرم در جعبه $(1+1)$-بعدی محاسبه کنیم.
برای محاسبه این انتروپی به یاد می‌آوریم که برای گاز بوزونی بی‌جرم در یک بعد فضایی چگالی انتروپی به سادگی قابل احتساب است:

$$\frac{S}{L} = b\,T, \tag{۱۶۲}$$

که b یک ضریب است. دما را از بالا $T=\frac{1}{2\pi}$ جای‌گذاری می‌کنیم. پس برای هر مود با توجه به نقاط قطعی که انتخاب کردیم و ۱۵۸:

$$S(k) = \frac{b}{2\pi}|ln\ (\epsilon|\vec{k}|)|. \tag{۱۶۳}$$

برای یافتن انتروپی کلی میدان، باید روی کل مودها جمع بزنیم. برای این کار ابتدا شرایط مرزی دوره‌ای در راستای عرضی متصور می‌شویم. در چنین شرایطی مودهای عرضی گسسته می‌شوند:

$$k_x = \frac{2n_x\pi}{D}, \quad k_y = \frac{2n_y\pi}{D}, \tag{۱۶۴}$$

که در بالا B محیط ابعاد چندبره حاصل از شرایط مرزی دوره‌ای است. حال اگر $D\to\infty$ جمع روی مودهای عرضی به یک انتگرال تبدیل می‌شود:

$$S_{total} = \frac{bD^2}{8\pi^3}\int d^2k\ |ln\ (\epsilon|\vec{k}|)|. \tag{۱۶۵}$$

در گرفتن انتگرال بالا باید به حدود دقت کرد. زمانی که $|\vec{k}|\to\frac{1}{\epsilon}$ آن‌گاه طول جعبه مد نظر برای هر مود به صفر میل می‌کند ($|ln\ (\epsilon|\vec{k}|)|\to ln\ 1=0$). در این صورت به طور کلی برای مودهای با $|\vec{k}|>\frac{1}{\epsilon}$ تمام سهم آن مودها از بین می‌رود و باید انتگرال را برای این مودها قطع کنیم. پس می‌نویسیم (در مختصات قطبی):

$$\begin{aligned} S_{total} &\simeq \frac{bD^2}{8\pi^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{1}{\epsilon}} dk\ |\vec{k}||ln\ (\epsilon|\vec{k}|)| \\ &= \frac{bD^2}{8\pi^3}\times 2\pi \times (\frac{1}{4\epsilon^2}) = \frac{bD^2}{16\pi^2\epsilon^2}. \end{aligned} \tag{۱۶۶}$$

پس داریم:

$$S_{total} \propto \frac{D^2}{\epsilon^2}. \tag{۱۶۷}$$

در این‌جا دقت می‌کنیم که D^2 مساحت عرضی یا همان مساحت سطح افق است. این محاسبه بیان می‌کند که اگر نقطه قطع را بی‌اندازه به افق نزدیک کنیم، انتروپی با محاسبات نظریه میدان کوانتومی بی‌کران می‌شود.
چنین رفتاری با انتروپی محدود بکنستاین–هاوکینگ سازگار نیست مگر آن‌که محاسبات نظریه میدانی تنها در خارج افق کشیده (فواصل بیش‌تر از نقطه قطع) قابل استفاده باشند و در فواصل نزدیک تر یک نظریه گرانش کوانتومی که باید تصحیحات لازم را فراهم کند.
همان‌طور که پیش‌تر دیدیم، برای سیستم با انرژي ثابت می‌توان با آنسامل میکروکانونیک انتروپی را محاسبه کرد:

$$S(E) = k\, ln\, \rho(E). \tag{۱۶۸}$$

اگر سیاه‌چاله شوارزشیلد را متصور شویم انرژی را می‌توان معادل با جرم دانست: $E \sim M$. یک نظریه کامل انرژی بالای گرانشی[۳۹] ، باید راه‌کاری برای محاسبه $\rho(E)$ بدست دهد تا با آن بتوانیم انتروپی بکنستاین–هاوکینگ را محاسبه کنیم. در فصل دوم دیدیم که انتروپی سیاه‌چاله شوارزشیلد با مساحت افق رویداد متناسب است. از آن‌جا که شعاع شوارزشیلد با جرم تناسب دارد داریم $S \sim M^2$ و در نتیجه:

$$\rho(M) \sim e^{M^2}. \tag{۱۶۹}$$

در چنین سیستمی تابع پارش به صورت زیر داده می‌شود:

$$Z(T) \sim \int dE \rho(E) e^{-\beta E}, \tag{۱۷۰}$$

که واگرا می‌شود چراکه با توجه به ۱۶۹، انتگرال‌ده توان مثبت خواهد داشت. در نظریه ریسمان با محاسباتی که در برای تابع پارش انجام دادیم، از ۱۳۵ داشتیم $\rho(M) \sim e^M$ که بیان می‌کرد که می‌توان تابع پارشی همگرا برای دماهای زیر دمای هگدورن داشت. اگر نظریه ریسمان بخواهد یک نظریه گرانش کوانتومی باشد باید بتوان به وسیله آن توجیهی برای رشد سریع چگالی حالات در سیاه‌چاله شوارزشیلد فراهم کرد.

راه حلی برای مشکل بالا، مدل کردن یک سیاه‌چاله بزرگ با نوسانات یک ریسمان بلند است. مفهومی که در این مدل به کارمان می‌آید، مفهوم افق کشیده است که آن‌را تعریف کردیم. این افق برای یک ناظر در حال سقوط بنابر اصل هم‌ارزی قابل تشخیص نیست اما برای ناظر بیرونی مثل یک دیواره غیر قابل نفوذ عمل می‌کند که درجه آزادی‌های سیاه‌چاله را در بر دارد. در این صورت درجه آزادی‌های ناظر سقوط کننده در این لایه ظاهر می‌شود و پارادوکس اطلاعاتی نخواهیم داشت. این استدلال را مکملیت سیاه‌چاله[۴۰] می‌نامند چراکه فیزیک با نگاه هردو ناظر تکمیل می‌شود و یکی از راه حل‌های پیشنهادی پارادوکس اطلاعات است که البته جزئیات زیادی

[۳۹] UV complete theory
[۴۰] black hole complementarity

دارد که خواننده می‌تواند برای خواندن آن‌ها به [۵] مراجعه کند. برای ما این افق کشیده دارای اهمیت است چراکه می‌توانیم یک جرم ریسمانی را در فاصله طول ریسمان $l_s = \rho$ از افق سیاه‌جاله قرار دهیم و در این صورت بنابر محاسباتمان دمای ویژه ریسمان $T = \frac{1}{2\pi\rho}$ یا معادلا $T \sim \frac{1}{l_s}$ خواهد بود که نزدیک به دمای هگدورن است. سپس خواهیم دید که درجه آزادی‌های این ریسمان بزرگ می‌تواند با انتروپی سیاه‌چاله سازگار باشد. در ادامه این فصل سعی می‌کنیم این مدل را دقیق‌تر بیان کنیم.

۲.۴ مدل ریسمان بلند و تخمین انتروپی سیاه‌چاله شوارزشیلد

مدل ریسمان بلند توسط ساسکیند [۵]،[۱۵] مطرح شد تا درجه آزادی‌های سیاه‌چاله گرانشی را بتوان با نظریه ریسمان توصیف کرد. این مدل انتروپی یک ریسمان بلند را بنابر دلایلی که بیان خواهیم کرد برابر با انتروپی سیاه‌چاله می‌گیرد و تخمینی سازگار با انتروپی سیاه‌چاله بدست می‌دهد. اساس کار ساسکیند تعدادی فرض است که با استفاده از آن‌ها می‌توان سیاه‌چاله را با ریسمان بلند مدل کرد.
یک تحول کوانتومی را متصور می‌شویم. اگر این تحول آن‌قدر آرام انجام گیرد که از زمان مشخصه سیستم بسیار طولانی تر باشد، آن‌گاه می‌توانیم ادعا کنیم که انرژی سیستم تغییر نکرده است. صورت دقیق‌تر این ادعا در مکانیک کوانتومی تحت عنوان قضیه بی‌دررو اثبات می‌شود [۱۶]. صورت این قضیه بیان می‌کند که اگر یک سیستم تحت تحول بی‌دررو قرار بگیرد، تعداد حالت‌ها در انرژی‌های مختلف ثابت می‌ماند و یا به طور معادل چگالی حالات ناوردا خواهد بود. با استفاده از چنین تحولی می‌توانیم سیستم را به طور بی‌دررو تغییر دهیم تا به صورتی در آید که محاسبه انتروپی ساده باشد. سپس بنابر قضیه بی‌دررو انتروپی محاسبه شده برابر با انتروپی پیش از تحول خواهد بود. در نظریه ریسمان برای محاسبه انتروپی از ایده مشابهی استفاده می‌شود. این بار پارامتری که تحت کنترل است کاپلینگ برهمکنش ریسمان g است و ناوردای بی‌دررو تعداد حالات یا انتروپی خواهد بود. در مدل مد نظر ما یک سیاه‌چاله شوارزشیلد را متصور می‌شویم و سپس در نظریه کاپلینگ ریسمان را به صفر میل می‌دهیم:$g \to 0$. سیاه‌چاله مد نظر در این حد باید به تعدادی ریسمان تبدیل شود، چراکه تنها موجوداتی که در نظریه ریسمان در حد $g \to 0$ انرژی متناهی دارند، خود ریسمان‌ها هستند. در این‌جا ادعا می‌کنیم که با ملاحظات مربوط به انتروپی، تحول سیاه‌جاله به یک تک ریسمان برانگیخته محتمل‌تر از تحول آن به تعداد زیادی ریسمان با انرژی کمتر است.

۱.۲.۴ بررسی انتروپی در تشکیل و پاره شدن ریسمان‌ها

ابتدا تعداد پارش‌های ریسمان بوزونی ۷۰ را متصور می‌شویم:

$$P(N;B) \sim \beta N^{-\gamma} e^{\delta\sqrt{N}}, \qquad (۱۷۱)$$

که در آن $\beta, \gamma, \delta > 0$. برای سادگی ریسمان بوزونی باز با تعداد بالای برانگیختگی‌های $N = N_0$ و انرژی E_0 را در نظر می‌گیریم. همانطور که پیش‌تر گفتیم در تعداد بالا $\alpha' E^2 \simeq N$. همچنین فرض می‌کنیم ریسمان دارای تکانه فضایی صفر است.
تغییرات انتروپی را برای حالتی که ریسمان مد نظر به دو ریسمان با انرژی نصف تبدیل شود بررسی می‌کنیم. برای محاسبه تغییرات انتروپی نسبت تعداد حالات برای دو ریسمان به تعداد حالات ریسمان اولیه را محاسبه می‌کنیم. برای ریسمان اولیه داریم $\alpha' E_0^2 \simeq N_0$ و تعداد حالات با $P(N_0;B)$ داده می‌شود. تعداد حالات دو

ریسمان حاصل با ضرب تعداد حالات هرکدام از آن‌ها قابل محاسبه است. فرض کردیم انرژي آن‌ها نصف انرژي اولیه است پس $\alpha'(E_0/2)^2 \simeq N_0/4$ و در نتیجه تعداد حالات با $P(N_0/4;B)^2$ داده خواهد شد. نسبت این دو تعداد را داریم:

$$\frac{P(N_0/4;B)^2}{P(N_0;B)} = 4^{2\gamma}\beta N_0^{-\gamma}. \tag{۱۷۲}$$

حال تغییرات انتروپی به صورت زیر است:

$$\frac{\Delta S}{k} = \Delta ln\, P(N;B) = ln\frac{P(N_0/4;B)^2}{P(N_0;B)} = 2\gamma ln\, 4 + ln\, \beta - \gamma ln\, N_0. \tag{۱۷۳}$$

عبارت بالا اگر N_0 را آن‌قدر بزرگ بگیریم که اثر ثوابت ناچیز باشد، منفی است. این بیان می‌کند که تبدیل یک ریسمان باز به دو ریسمان با ملاحظات انتروپی، کم احتمال است.
اگر به طور کلی ترکیب دو ریسمان باز با انرژي E_1 و E_2 و تعداد برانگیختگی بالا را به طوری که به یک ریسمان باز با انرژي $E_0 = E_1 + E_2$ تبدیل شوند را در نظر بگیریم، انتروپی افزایش خواهد یافت. برای دیدن این امر باز فرایند برعکس شکسته شدن ریسمان با انرژي بیشتر به دو ریسمان را در نظر می‌گیریم. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S}{k} &= \Delta ln\, P(N;B)\\ &= ln\frac{P(N_1;B)P(N_2;B)}{P(N_0;B)}\\ &= \delta(\sqrt{N_1}+\sqrt{N_2}-\sqrt{N_0}) + ln\, \beta + \gamma(ln\, N_0 - (ln\, N_1 + ln\, N_2)).\end{aligned} \tag{۱۷۴}$$

حال باید دقت کنیم که قید $E_0 = E_1 + E_2$ باید اعمال شود که معادل با $\sqrt{N_1}+\sqrt{N_2}=\sqrt{N_0}$ است. در این صورت جمله اول در عبارت بالا صفر می‌شود و برای برانگیختگی‌های با تعداد بالا داریم:

$$\frac{\Delta S}{k} \simeq \gamma(ln\, N_0 - ln\, (N_1N_2)). \tag{۱۷۵}$$

با استفاده دوباره از قید $\sqrt{N_1}+\sqrt{N_2}=\sqrt{N_0}$ عبارت بالا را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\Delta S}{k} \simeq \gamma\big(ln(N_1+N_2+2\sqrt{N_1N_2}) - ln(N_1N_2)\big). \tag{۱۷۶}$$

برای برانگیختگی‌های پر تعداد N_1 و N_2 تغییرات انتروپی منفی خواهد بود چراکه رفتار عبارت بالا به صورت $\frac{\Delta S}{k} \sim ln\, \frac{O(N)}{O(N^2)} < 0$ است. در نتیجه به طور کلی ترکیب شدن دو ریسمان و تشکیل یک تک ریسمان با ملاحظات انتروپی حداقل در حد تعداد برانگیختگی بالا محتمل‌تر است. اگرچه محاسبه بالا یک اثبات نیست، اما بیان می‌کند که ادعای تبدیل شدن سیاه‌چاله به یک تک ریسمان تا حدی معقول است.

۲.۲.۴ شعاع ژیراسیون برای مدل ولگشت ریسمان بلند

برای مدل کردن تحول ریسمان بلندی که مد نظرمان است، طول آن را L می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم از بیت‌های ریسمانی[۴۱] به طور l_s تشکیل شده است. هدف ما محاسبه شعاع میانگین ناحیه‌ای است که این ریسمان در فضا اشغال می‌کند، تا بتوانیم در ادامه آن‌را با شعاع شوارزشیلد مقایسه کنیم. برای این‌کار ریسمان را با مسیر یک ولگرد در d-بعد فضایی مدل می‌کنیم که به طور تصادفی و هم‌احتمال قدم‌هایی در d راستای ممکن با طول l_s برمی‌دارد. برای این مدل ولگشت می‌توان شعاع نزدیک‌ترین کره در فضا را که حجمی معادل ناحیه اشغال شده توسط ولگرد را دارد را محاسبه کرد که به شعاع ژیراسیون[۴۲] گویند.
جلوتر تعریف دقیق شعاع ژیراسیون را بیان می‌کنیم اما ابتدا خوب است تخمینی از طول ریسمان بلند برحسب سایر پارامترها بدست آوریم. از محاسبه کنش یک ریسمان استاتیک می‌دانیم که می‌توان کشش ریسمان را با چگالی جرمی مرتبط کرد: $\mu_0 = T_0$، پس می‌نویسیم:

$$M \sim TL \sim \frac{1}{\alpha'}L \sim \frac{L}{l_s^2} \implies L \sim l_s^2 M. \tag{۱۷۷}$$

در ادامه میانگین مجذور جابه‌جایی از مبدا را برای مدل ولگشت به خاطر می‌آوریم، که بر حسب واریانس و تعداد قدم‌ها در بعد دل‌خواه به صورت زیر است:

$$\langle x^2 \rangle = \sigma^2 n. \tag{۱۷۸}$$

همان‌طور که در بالا گفتیم تعداد قدم‌ها، تعداد بیت‌های ریسمانی سازنده ریسمان بلند است. اگر $k = 1$ آن‌گاه به سادگی می‌توان دید که تعداد این بیت‌ها انتروپی را بدست می‌دهند:

$$number\ of\ string\ bits = \frac{L}{l_s} \sim l_s M \sim S, \tag{۱۷۹}$$

که در بالا از ۱۷۷ و این‌که انتروپی ریسمان برای تمام حالاتی که در فصل سوم محاسبه کردیم، متناسب با $\sqrt{\alpha'}E = l_s M$ است استفاده شد. اگر فرض کنیم که واریانس برابر با طول مشخصه ریسمان‌هاست: $\sigma = l_s$، آن‌گاه با ۱۷۸ می‌توانیم شعاع ژیراسیون را تخمین بزنیم. شعاع ژیراسیون R_{str} به صورت جذر میانگین مجذور جابه‌جایی از مبدا تعریف می‌شود. پس داریم:

$$R_{str} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = l_s\sqrt{S} \sim l_s^{3/2} M^{1/2} \sim l_s N^{1/4}, \tag{۱۸۰}$$

که در بالا در جمله آخر از طیف جرمی ریسمان باز بوزونی برای تعداد برانگیختگی بالا یعنی $M^2 \sim N/\alpha'$ استفاده کردیم.
حال می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا برای یک ریسمان به اندازه کافی جرم‌دار گذار به یک سیاه‌چاله ممکن است و کرانی که جرم لازم است برای این گذار ارضا کند را بدست آوریم. ابتدا حالت $(3 + 1)$-بعدی را در نظر

---

[۴۱] string bits
[۴۲] gyration radius

می‌گیریم. برای آن‌که ریسمان بلند مد نظر بتواند به سیاه‌چاله گذار کند معقول است که شرط زیر برای شعاع ژیراسیون وجود داشته باشد:

$$R_{str} < R_S, \tag{۱۸۱}$$

که در بالا R_S شعاع شوارزشیلد است. در سمت چپ نامساوی ۱۸۰ و در سمت راست شعاع شوارزشیلد $R_S \sim G_4 M \sim g^2 l_s^2 M$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$M > \frac{1}{g^4 l_s}. \tag{۱۸۲}$$

در نتیجه یک کران M_0 برای جرم بدست می‌آید:

$$M_0 := \frac{1}{g^4 l_s} \sim \frac{m_P}{g^3}, \tag{۱۸۳}$$

که m_P در بالا جرم پلانک است. عبارت بالا به این معنی است که برای هر کاپلینگ ثابت برای ریسمان‌ها، یک کران جرمی وجود دارد که هر حالت ریسمانی با جرمی بیش از آن می‌تواند شعاع ژیراسیون کمتر از شعاع شوارزشیلد داشته باشد. پس ریسمان‌های به قدر کافی جرم‌دار به طوری که $M > M_0$ علی‌الاصول می‌توانند یک سیاه‌چاله تشکیل دهند.
با محاسبه مشابه می‌توانیم نشان دهیم که کران قبل را برای $(d+1)$-بعد هم کار می‌کند.

۳.۲.۴ تخمین انتروپی سیاه‌چاله شوارزشیلد

حال به مرحله‌ای رسیده‌ایم که با مدل ریسمان بلند تخمینی سازگار برای انتروپی سیاه‌چاله شوارزشیلد بدست آوریم. همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، تخمین مد نظر روی تعدادی فرض سوار است که سعی کردیم در بخش‌های قبل در این فصل نشان دهیم که ناسازگار و ناممکن نیست‌اند. فرض‌های مد نظر از قرار زیراند:

i) سیاه‌چاله در حد $g \to 0$ به یک تک ریسمان برانگیخته تبدیل می‌شود.

ii) با تغییر دادن کاپلینگ ریسمانی g به صفر به طور بی‌دررو، بنابر قضیه بی‌دررو چگالی حالات و در نتیجه انتروپی ریسمان نهایی و سیاه‌چاله یکی خواهند بود.

iii) انتروپی ریسمان نهایی از مرتبه جرم است:

$$S \sim l_s M \tag{۱۸۴}$$

iv) در حین میل دادن g به صفر، در زمانی سیاه‌چاله به ریسمان گذار می‌کند. در این لحظه شعاع افق رویداد از مرتبه l_s خواهد بود: $R_{S(d+1)} \sim l_s$.

ابتدا ارتباط بین ثابت نیوتن $(d+1)$-بعدی و کاپلینگ و طول ریسمان را در واحد های طبیعی به خاطر می‌آوریم:

$$G_{d+1} = l_{P(d+1)}^{d-1} = g^2 l_s^{d-1}, \tag{۱۸۵}$$

که در بالا طول پلانک $(d+1)$-بعدی به صورت زیر تعریف شده است (با نوشتن ثابت ثابت پلانک و سرعت نور به طور صریح):

$$l_{P(d+1)} := \sqrt{\frac{\hbar G_{d+1}}{c^3}}. \tag{۱۸۶}$$

با ثابت نگاه داشتن l_s کاپلینگ را به صفر میل می‌دهیم: $g \to 0$. در این صورت بنابر ۱۸۵ داریم:

$$G_{d+1} \to 0. \tag{۱۸۷}$$

این بیان می‌کند که گرانش در حد کاپلینگ کم گرانش خاموش خواهد شد. با یک سیاه‌چاله شوارزشیلد $(d+1)$-بعدی با جرم M_0 محاسبات خود رو آغاز می‌کنیم. مقدار اولیه کاپلینگ ریسمان را g_0 می‌گیریم و متقابلا مقدار اولیه ثابت نیوتن را با $G_{0(d+1)}$ نشان می‌دهیم. رابطه شعاع شوارزشیلد در بعد بالا را از ۳۲ به خاطر می‌آوریم:

$$R_{0S(d+1)} = \left(\frac{16\pi G_{0(d+1)} M_0}{(d-1)\mathcal{A}_{d-1}}\right)^{\frac{1}{d-2}} = \left(\frac{16\pi g_0^2 M_0}{(d-1)\mathcal{A}_{d-1}}\right)^{\frac{1}{d-2}} l_s^{\frac{d-1}{d-2}}. \tag{۱۸۸}$$

از تساوی آخر در بالا می‌بینیم که برای یک g_0 ثابت، اگر جرم M_0 به اندازه کافی بزرگ باشد، شعاع شوارزشیلد از طول ریسمان بزرگ‌تر خواهد بود: $R_S > l_s$، اما اگر $g \to 0$، آن‌گاه لحظه‌ای وجود خواهد داشت که این شعاع و طول ریسمان قابل قیاس باشند: $R_S \sim l_s$. در این لحظه با توجه به فرض سیاه‌چاله به تک ریسمان بلندگذار می‌کند.
به طور کلی جرم در فرایند بی‌دررو می‌تواند تغییر کند. جرم را تابعی از کاپلینگ می‌گیریم:

$$M = M(g), \quad M(g_0) = M_0. \tag{۱۸۹}$$

حال به دلیل ثابت بودن انتروپی در فرایند بی‌دررو، انتروپی سیستم برابر با انتروپی سیاه‌چاله اولیه خواهد بود که از ۳۷ رفتاری به صورت زیر دارد:

$$(S_{BH})^{d-2} \sim G_{d+1} M^{d-1} = constant. \tag{۱۹۰}$$

پس داریم:

$$G_{d+1} M^{d-1} = g^2 l_s^{d-1} M^{d-1} = constant \implies M(g) = \left(\frac{constant}{g^2 l_s^{d-1}}\right)^{\frac{1}{d-1}}. \tag{۱۹۱}$$

مقدار ثابت در بالا را با استفاده از $M(g_0) = M_0$ بدست می‌آوریم و پس از جای‌گذاری داریم:

$$M(g) = M_0 \left(\frac{g_0^2}{g^2}\right)^{\frac{1}{d-1}}. \tag{۱۹۲}$$

از عبارت آخر در ۱۸۸ برای کاپلین دل‌خواه g داریم:

$$R_{S(d+1)}(g) = \left(\frac{16\pi g^2 M(g)}{(d-1)\mathcal{A}_{d-1}}\right)^{\frac{1}{d-2}} l_s^{\frac{d-1}{d-2}}. \tag{۱۹۳}$$

اگر در مقداری از g، $R_{S(d+1)}(g)$ از مرتبه l_s شود، بنابر فرض گذار به ریسمان اتفاق می‌افتد. در این مقدار از g داریم:

$$\begin{aligned} \frac{R_{S(d+1)}(g)}{l_s} &= \left(\frac{16\pi g^2 M(g)}{(d-1)\mathcal{A}_{d-1}}\right)^{\frac{1}{d-2}} l_s^{\frac{1}{d-2}} \approx 1 \\ &\implies g^2 M(g) l_s \approx 1 \\ &\implies M(g) l_s \sim \frac{1}{g^2}. \end{aligned} \tag{۱۹۴}$$

از عبارت بالا g را بر حسب $M(g)$ و l_s داریم و حال با ترکیب عبارت بالا و ۱۹۲ و استفاده از ۱۸۵ داریم:

$$M(g) l_s \approx M_0^{\frac{d-1}{d-2}} G_{0(d+1)}^{\frac{1}{d-2}}. \tag{۱۹۵}$$

اما همانطور که گفته بودیم انتروپی ریسمان حاصل به صورت $l_s M$ داده می‌شود پس حساب می‌کنیم:

$$S_{str} \sim l_s M(g) \sim M_0^{\frac{d-1}{d-2}} G_{0(d+1)}^{\frac{1}{d-2}} \sim S_{BH}. \tag{۱۹۶}$$

که عبارت بالا دقیقا همانند انتروپی بکنستاین-هاوکینگ سیاه‌چاله شوارزشیلد $(d+1)$-بعدی رفتار می‌کند که در ۳۷ محاسبه کردیم. با آنکه این محاسبه تاحدی کیفی بود و ضرایب تناسب در آن به طور دقیق مشخص نبودند، نتیجه بدست آمده بیان می‌کند که با فرض‌هایی نسبتا معقول می‌توان با مدل کردن یک سیاه‌چاله با یک ریسمان بلند بسیار برانگیخته، فرم درست انتروپی ماکروسکوپی را بدست آورد. به طور دقیق‌تر این محاسبات بیان می‌کنند که سیاه‌چاله شوارزشیلد حد کاپلینگ بالای یک ریسمان بسیار برانگیخته است.

۵ سیاه‌چاله های ریسمانی و شمارش وفا-استرومینگر

برای ساخت سیاه‌چاله‌ها در نظریه ریسمان باید بتوانیم برانگیختگی‌های زیادی را ایجاد کنیم تا بتوانند جرم بالای سیاه‌چاله‌ها را فراهم کنند. یکی از راه‌های ساخت چنین برانگیختگی‌هایی برخورد دادن $brane$ های مختلف در نظریه ریسمان است. ساده‌ترین $brane$ ها، $brane - 1$ است که همان ریسمان نسبیتی است و می‌توان موجودات با بعد فضایی بالاتر نیز در نظر گرفت. هم‌چنین باید ساختاری که ایجاد می‌شود پایدار باشد. به عبارتی همانطور که در سایر سیاه‌چاله‌ها دیده‌ایم باید شعاعی ناصفر داشته باید و در خودش جمع نشود. برای این‌کار این موجودات را باید به موجوداتی با اندازه‌ای ناصفر تبدیل کنیم که این کار را با فشرده سازی در جهاتی از فضا انجام می‌دهیم. به طور دقیق‌تر $brane$ ها رو حول ساختاری پایدار می‌پیچیم. این موجودات پایدار در هندسه خمینه‌های کالابی-یائو[۴۳] هستند. در این نوشته به تعریف و جزئیات ریاضی این خمینه‌ها نمی‌پردازیم و می‌پذیریم که در 4-بعد دو نوع فشرده از آن‌ها وجود دارد که چنبره 4-بعدی T^4 و فضای $K3$ هستند. پس از در نظر گرفتن این خمینه‌های فشرده باید عملیات فشرد سازی را طوری مهندسی کنیم که موجود حاصل در بعد کم‌تر ویژگی‌های فیزیکی سیاه‌چاله را داشته باشد. یعتی افق رویدادی وجود داشته باشد که از تکینگی‌ها حفاظت کند. قضاهایی وجود دارند که بیان می‌کنند که حداقل 4 نوع $brane$ لازم است تا بتوان سیاه‌چاله‌ای $(1+3)$-بعدی ساخت. در ساخت سیاه‌چاله $(1+4)$-بعدی این تعداد به 3 نوع $brane$ کاسته می‌شود. ساده‌ترین موجوداتی که شمارش حالات میکروسکوپیک برای آن‌ها در نظریه ریسمان انجام شده است سیاه‌چاله‌های (اکستریمال) رایزنر-نوردستروم $(1+4)$-بعدی هستند. یک سیستم حاصل از برهم‌کنش $D - brane$ ها در نظریه ریسمان با سیاه‌چاله‌هایی که از حد انرژی پایین نظریه ابرریسمان یعنی ابرگرانش بدست می‌آیند قابل تمییز نخواهد بود. در حقیقت راه دیگر یافتن سیاه‌چاله‌های ریسمانی ساخت کنش ابرگرانش در بعد مد نظر، با فشردگی مناسب و سپس حل معادلات حرکت است. اما به دلیل شهودی که از فیزیک و بارهای سیاه‌جاله در برخورد $brane$ ها بدست می‌آید ما این روش را دنبال خواهیم کرد.

امکان یافتن سیاه‌جاله‌های ابرگرانشی با استفاده از صورت‌بندی‌هایی از موجودات گسترده برانگیخته در نظریه ریسمان یک ارتباط بین کوپلینگ ضعیف و قوی بدست می‌دهد که همواره در فیزیک تئوریک برا فیزیک‌دان‌ها دارای اهمیت است. البته باید دقت کرد که این ارتباط همواره ممکن نیست. برای استفاده از محاسبات انجام شده در بعد بالاتر نظریه ریسمان برای توصیف سیاه‌چاله حاصل از فشرده سازی، لازم است که نتیجه بدست آمده در گذار از کاپلینگ ضعیف ($brane$ ها) به کاپلینگ قوی (سیاه‌چاله‌ها) معتبر باقی بماند. واضح است که محاسباتی که در فصل سوم برای روابط ترمودینامیکی در نظریه ریسمان انجام دادیم در برهم‌کنش خاموش و کاپلینگ ضعیف بودند. در توصیف موجودی مانند یک سیاه‌چاله باید برهم‌کنش‌هارا لحاظ کرد پس برای استفاده از نتایج ترمودینامیک ریسمان‌ها لازم است که آن‌ها در افزایش مقدار کاپلینگ ناوردا بمانند. عاملی که برای اعتبار نتایج در گذار بین کاپلینگ‌ها لازم است، وجود ابرتقارن است. این الزام منطقی است چراکه سیاه‌چاله‌ها قرار است در چارچوب نظریه ریسمان ابرمتقارن توصیف شوند. در حالت کلی هر فشرده سازی مقداری از ابر تقارن را می‌شکند ولی هدف آن است که تاحدی ابرتقارن حفظ شود که نتایج در تغییرات کاپلینگ ناوردا بمانند. در یک نظریه ابرمتقارن به موجوداتی که تاحدی ابرتقارن کل را حفظ می‌کنند حالات BPS گویند.

سیاه‌چاله‌های مد نظر ما در محاسباتمان سیاه‌جاله‌های اکستریمال BPS خواهند بود. از محاسبات ابرریسمانی می‌توان نشان داد که سیاه‌جاله‌های اکستریمالی که BPS نیز هستند در شرط $M = +Q$ صدق می‌کنند. لازم به ذکر است که این شرط بیان می‌کند که تمام سیاه‌جاله‌های اکستریمال لزوما BPS نیستند، چراکه همان‌طور

---

[۴۳] Calabi–Yau manifolds

که در فصل دوم گفتیم در نسبیت عام در هر بعد سیاه‌چاله‌های رایزنر-نوردستروم در شرط $M = |Q|$ صدق می‌کنند.

۱.۵ سیاه‌چاله رایزنر-نوردستروم اکستریمال $(4+1)$-بعدی با 3 بار متفاوت

ساده‌ترین سیاه‌چاله‌ای که می‌توان برای آن میکروحالت را شمارش کرد، سیاه‌چاله رایزنر-نوردستروم $(4+1)$-بعدی با 3 بار است. وفا و استرومینگر در سال 1996 برای این سیاه چاله شمارش خود را انجام دادند [۴]. ما ابتدا محاسبات را به روشی ساده‌تر انجام می‌دهیم و سپس به روشی که وفا و استرومینگر استفاده کردند می‌پردازیم.

پیش از آن‌که به ساخت جواب سیاه‌چاله مد نظر بپردازیم لازم است مقدماتی را در مورد فشرده سازی $D-brane$ ها یاد آوری کنیم. می‌دانیم که ریسمان‌ها در حضور میدان کلب-راموند[۴۴] $B_{\mu\nu}$ بسیار مشابه ذره در میدان الکترومغناطیسی رفتار می‌کنند. کنش ریسمان در حضور این میدان به صورت زیر است:

$$S = S_{str} - \frac{1}{2}\int d\tau d\sigma\, B_{\mu\nu}(X(\tau,\sigma))\partial_\tau X^{[\mu}\partial_\sigma X^{\nu]} - \frac{1}{6\kappa^2}\int d^{d+1}x\, H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}, \quad (۱۹۷)$$

که در بالا S_{str} کنش ریسمان آزاد و $H_{\mu\nu\rho}$ شدت میدان متناظر با $B_{\mu\nu}$ است:

$$H_{\mu\nu\rho} := \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}. \quad (۱۹۸)$$

هم‌چنین ثابت κ یک ثابت بعددار است. ریسمان منشا میدان کلب-راموند است و با وردش از کنش بالا نسبت به $B_{\mu\nu}$ می‌توان جریانی برای ریسمان تعریف کرد که در معادله تحول میدان ظاهر شود:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\kappa^2}\frac{H^{\mu\nu\rho}}{\partial x^\rho} = j^{\mu\nu}, \\ &j^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\int d\tau d\sigma \delta^{d+1}(x - X(\tau,\sigma))(\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu - \partial_\tau X^\nu \partial_\sigma X^\mu). \end{aligned} \quad (۱۹۹)$$

جریان کلب-راموند یک جریان دو اندیسه است و چگالی بار منسوب به کلب-رموند را بردار $\vec{j}^0$ می‌گیرند که مولفه‌های آن j^{0k} هستند به طوری که k از اندیس‌های فضایی است. در نهایت می‌توان بار منسوب به ریسمان را محاسبه کرد که یک بار برداری است:

$$\vec{Q} = \int d^d x\, \vec{j}^0. \quad (۲۰۰)$$

حال می‌توانیم مفاهیم بالا را به موجودات گسترده دیگر در نظریه ریسمان تعمیم دهیم. می‌گوییم یک $Dp-brane$ باردار است اگر بتوان آن را با یک میدان تنسوری پادمتقارن با $(p+1)$ اندیس کوپل کرد. جهان-حجم $Dp-brane$ را با مختصه زمان‌گونه τ و مختصات فضاگونه $\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^p$ پرمایش می‌کنیم. آن‌گاه مختصات فضازمانی $Dp-brane$ به صورت:

$$X^\mu(\tau, \sigma^1, ..., \sigma^p), \quad \mu = 0, 1, ..., d, \quad (۲۰۱)$$

[۴۴] Kalb–Ramond

خواهند بود. هم‌چنین میدان تنسوری پارمتقارن را با $A_{\mu\mu_1...\mu_p}(x)$ نشان می‌دهیم. حال می‌توان جمله مربوط به کوپل شدن میدان با $Dp-brane$ در کنش به صورت زیر گرفت:

$$S_p=-\int d\tau d\sigma_1...d\sigma_p\,\partial_\tau X^\mu\partial_{\sigma^1}X^{\mu_1}...\partial_{\sigma^p}X^{\mu_p}A_{\mu\mu_1...\mu_p}\big(X(\tau,\sigma^1,...,\sigma^p)\big). \qquad (۲۰۲)$$

در نظریه ریسمان بوزونی تنها میدان بی‌جرم پادمتقارن، میدان کلب-راموند است که همان‌طور که دیدیم با ریسمان‌های کوپل می‌شود. در نتیجه در نظریه ریسمان بوزونی $Dp-brane$ ها باردار نمی‌شوند. در نظریه ابرریسمان میدان‌های بیش‌تری وجود دارند و به تبع $Dp-brane$ های باردار قابل ساخت هستند. حال به طور مختصر به این $Dp-brane$ ها می‌پردازیم. در نظریه ابرریسمان‌های نوع IIA و IIB میدان‌های پادمتقارن دیگری نیز در ناحیه RR داریم:

$$\begin{aligned}&IIA:\ A_\mu,\ A_{\mu\nu\rho},\\ &IIB:\ A,\ ,A_{\mu\nu},\ A_{\mu\nu\rho\sigma}.\end{aligned} \qquad (۲۰۳)$$

این میدان‌ها هستند که $Dp-brane$ ها را باردار می‌کنند. در نظریه ریسمان نوع IIA، میدان A_μ با $D0-brane$ ها و میدان $A_{\mu\nu\rho}$ با $D2-brane$ ها کوپل می‌شوند. به طور مشابه در نوع IIB میدان $A_{\mu\nu}$ با $D1-brane$ ها و میدان $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ با $D3-brane$ ها کوپل می‌شوند. این $D-brane$ ها دارای بار الکتریکی هستند. در عوض مواردی که در بالا ذکر نشدند یعنی:

$$\begin{aligned}&IIA:\ D4,D6,D8-branes\\ &IIB:\ D5,D7,D9-branes,\end{aligned} \qquad (۲۰۴)$$

دارای بار مغناطیسی هستند.

حال مشاهده‌ای می‌کنیم که برای محاسبات ما در ساخت سیاه‌چاله‌های ریسمانی مفید خواهد بود. بار $Dp-brane$ ها زمانی که p-بعد فضایی به صورت دایره‌هایی فشرده شده باشند دارای توصیف ساده‌ای است. فرض می‌کنیم p جهت فشرده شده در راستای $Dp-brane$ مد نظر و باقی جهات که هندسه فضای موثر بعد پایین‌تر را خواهند ساخت در راستای عمود بر آن هستند. ناظری که تنها به ابعاد غیر فشرده دسترسی دارد، $brane$ مد نظر را به صورت یک ذره نقطه‌ای می‌بیند و ادعای ما این است که این ذره تحت تاثیر یک میدان مکسولی که از میدان تنسوری $A_{\mu,\mu_1,...,\mu_p}$ نشأت می‌گیرد، باردار می‌شود.
$x^1,x^2,...,x^p$ را ابعاد فشرده و $X^1,...,X^p$ را مختصات $brane$ مد نظر می‌گیریم. فرض بر آن است که ابعاد فشرده روی دایره‌هایی با شعاع‌های $R^1,...,R^p$ هستند و با پارامترهای $\sigma^k\in[0,2\pi]$ مختصات روی $Dp-brane$ را به صورت

$$X^k(\tau,\sigma^1,...,\sigma^p)=R^k\sigma^k,\quad k=1,...,p, \qquad (۲۰۵)$$

تعیین می‌کنیم. لازم به دقت است که در عبارت بالا روی اندیس k جمع نزده‌ایم.سایر مختصات را با X^m نشان می‌دهیم که اندیس m از ابعاد غیر فشرده است و این مختصات را به صورت زیر، در نظر می‌گیریم:

$$X^m(\tau,\sigma^1,...,\sigma^p)=x^m(\tau). \qquad (۲۰۶)$$

این معادله بیان‌گر آن است که برای ناظر بعد پایین، $Dp-brane$ به صورت یک ذره نقطه‌ای دیده می‌شود. از آن‌جا که تنها X^k ها به σ^k وابسته هستند، ۲۰۲ زمانی ناصفر خواهد بود که $\mu_k = k$ و $k=1,...,p$:

$$S_p = -\int d\tau d\sigma^1 ... d\sigma^p\ \partial_\tau X^\mu R^1 R^2 ... R^p\ A_{\mu 12...p}\big(X(\tau,\sigma^1,...,\sigma^p)\big), \tag{۲۰۷}$$

که در بالا از مختصات ۲۰۵ استفاده کردیم. از آن‌جایی که میدان تنسوری A در بالا پادمتقارن است و اندیس تکراری نمی‌پذیرد، تنها انتخاب ممکن برای μ، $\mu = m$ است:

$$S_p = -\int d\tau d\sigma^1 ... d\sigma^p\ \partial_\tau X^m R^1 R^2 ... R^p\ A_{m12...p}\big(X^m(\tau), X^k(\sigma^k)\big). \tag{۲۰۸}$$

حال اگر از وابستگی میدان تنسوری به ابعاد فشرده صرف نظر کنیم، داریم:

$$S_p = -R^1 R^2 ... R^p \int d\tau d\sigma^1 ... d\sigma^p\ \partial_\tau x^m\ A_{m12...p}(x^m(\tau)). \tag{۲۰۹}$$

اکنون می‌توان انتگرال روی σ ها را گرفت و نتیجه ضرب اندازه ابعاد فشرده خواهد شد:

$$V_p = (2\pi R^1)...(2\pi R^p). \tag{۲۱۰}$$

با دقت به عبارات بالا می‌توان دید که اکنون میدان $A_{m12...p}$ به طور موثر یک اندیس دارد و تعریف می‌کنیم:

$$\frac{1}{(\alpha')^{p/2}} \bar{A}_m(x(\tau)) := A_{m12...p}(x(\tau)). \tag{۲۱۱}$$

فاکتور α' برای دادن بعد لازم به میدان تک ذره معرفی شد که بعد جرمی یا وارون طولی است. میدان $\bar{A}$ را میدان مکسولی ناشی شده از کاهش بعد میدان تنسوری A می‌نامیم. یاد آوری می‌کنیم که در فرایند ساخت میدان $\bar{A}$ دو قدم برداشتیم: تمام اندیس‌ها به جز اندیس اول روی ابعاد فشرده شمارش می‌شدند و از وابستگی میدان به ابعاد فشرده صرف نظر کردیم. حال کنش را برحسب میدان مکسولی می‌نویسیم:

$$S_p = -\frac{V_p}{(\alpha')^{p/2}} \int d\tau\ \partial_\tau x^m\ \bar{A}_m(x(\tau)) = -\frac{V_p}{(l_s)^p} \int \bar{A}_m dx^m. \tag{۲۱۲}$$

از کنش بالا و فرض‌هایی که کردیم واضح است که $Dp-brane$ در ابعاد غیرفشرده مشابه یک ذره باردار با بار:

$$Q = \frac{V_p}{(l_s)^p}, \tag{۲۱۳}$$

رفتار می‌کند. بار ۲۱۳ را می‌توان به عنوان یک واحد بار برای $Dp-brane$ مذکور در نظر گرفت. یعنی اگر فرض کنیم $Dp-brane$، q بار حول مختصات فشرده پیچیده شده است داریم:

$$\begin{aligned} S_p &= -\frac{R^1 R^2 ... R^p}{(\alpha')^{p/2}} \int d\tau \int_{q\ times\ on\ [0,2\pi]\ on\ each\ \sigma^i} d\sigma^1 ... d\sigma^p\ \partial_\tau x^m\ \bar{A}_m(x(\tau)) \\ &= -q\frac{V_p}{(\alpha')^{p/2}} \int d\tau\ \partial_\tau x^m\ \bar{A}_m(x(\tau)) \\ &= -q\frac{V_p}{(l_s)^p} \int \bar{A}_m dx^m. \end{aligned} \tag{۲۱۴}$$

عبارت بالا بیان می‌کند که این بار $Dp - brane$، q واحد بار Q دارد. با کمی دقت می‌توان دید که همین واحد بار را می‌توان با فشرده کردن q تا $Dp - brane$ به اندازه یک دور حول مختصات بدست آورد. فرایندی که در بالا نسبتا به تفصیل توضیح دادیم، بخشی از بارهای سیاه‌چاله مد نظر ما در ابرگرانش را بدست می‌دهد.
بار دیگری که در فشرده سازی ظاهر می‌شود ناشی از فشرده سازی در روی دایره S^1 خواهد بود. یافتن این بار با محاسبات مشابه محاسبات بحث دوگانی T[۴۵] است که پیش‌تر دیده‌ایم. به طور خلاصه از آن‌جایی که روی دایره فشرده سازی می‌کنیم مود صفر بسط مختصات ریسمان که آن را معمولا به x_0 نشان می‌دهیم دارای مقادیر روی دایره خواهد بود. آن‌گاه اگر عملگر انتقال را به صورت e^{-iap} در نظر بگیریم، انتقال به اندازه $2\pi R$ که R شعاع دایره S^1 مد نظر است، نباید تغییری ایجاد کند. در نتیجه $e^{-i2\pi Rp}$ باید مانند عملگر همانی باشد. پس مقادیر تکانه در راستای دایره باید به صورت زیر باشند:

$$p = \frac{n}{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{۲۱۵}$$

به این گونه تکانه گسسته به ازای هر n، n واحد تکانه کالوزا-کلاین[۴۶] گویند.

حال با مقدماتی که در بالا بیان کردیم می‌توانیم به سراغ ساخت تقریب ابرگرانشی $(4+1)$-بعدی برای نظریه ابرریسمان نوع IIB برویم. این تقریب با فشرده سازی 5-بعد فضایی بدست می‌آید و باید دقت کنیم که فشرده سازی طوری انجام شود که مقداری از ابرتقارن حفظ شود و حالت نهایی بدست آمده یک حالت BPS باشد. مختصات را در فضای $(9+1)$-بعدی در نظر می‌گیریم و آن‌ها را با $x^0, x^1, ..., x^9$ نشان می‌دهیم. هدف ما فشرده سازی مختصات $x^5, ..., x^9$ است تا در نهایت به سیاه‌چاله‌ای در $(4+1)$-بعد برسیم. همان‌طور که پیش‌تر بیان کردیم برای رسیدن به حد ابرگرانشی و حفظ بخشی از ابرتقارن برای ساخت سیاه‌چاله $(4+1)$-بعدی باید 3 بار مختلف برای سیاه‌چاله مشخص کنیم. برای این بارها Q_{D5} تا $D5 - brane$ که حول چندبره $T^5(x^5, ..., x^9)$ فشرده شده اند، Q_{D1} تا $D1 - brane$ که حول S^1 با شعاع R و در راستای x^5 فشرده شده اند و n واحد تکانه کالوزا-کلاین به دلیل فشردگی روی S^1 در نظر می‌گیریم. این $Dp - brane$ ها با مکانیزمی مشابه توضیحات بالا برای $Dp - brane$ های فشرده و ۲۱۳ دارای بار هستند و به دلیل تعدادشان در مجموع Q_{D5} و Q_{D1} واحد بار مربوط به $D5 - brane$ و $D1 - brane$ در سیستم ایجاد می‌شود. دقت کنیم که فشرده سازی ما روی $T^5 = T^4 \times S^1$ انجام می‌شود و همان‌طور که پیش‌تر بیان کردیم در 4-بعد چندبره T^4 یکی از دو خمینه کالابی-یائو فشرده است.
حال باید جواب سیاه‌چاله $(4+1)$-بعدی را با کاهش بعد متریک ابرریسمان $(9+1)$-بعدی بدست آوریم. قبل از انجام عملیات فشرده سازی باید متریک مربوط به موجوداتی که در بالا متصور شدیم در $(9+1)$-بعد بسازیم. همان‌طور که در بالا گفتیم سه نوع موجود در راستاهای فشرده مد نظر هستند. $D1 - brane$ و $D5 - brane$ ها و یک موج تکانه که دارای n واحد تکانه کالوزا-کلاین است که آن‌را با W نشان می‌دهیم.
برای ساخت متریک $(9+1)$-بعدی از یک قانون به نام برهم‌نهی هارمونیک[۴۷] استفاده می‌کنیم [۱۷]. این قانون بیان می‌کند برای سیستم‌های $brane$ ها با راستاهای عرضی متناهی می‌توان یک آنزاتز برای متریک فضای مد نظر بر حسب یک سری توابع هارمونیک H که به تعداد $Dp - brane$ ها وابسته اند بدست آورد.

---

[۴۵] T-duality
[۴۶] Kaluza-Klein
[۴۷] harmonic superposition

ما این قانون را اثبات نمی‌کنیم و تنها آنزاتزی که از آن نتیجه می‌شود را بیان می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
ds^2_{9+1} =& - H_{D1}^{-1/2} H_{D5}^{-1/2} \left(H_W^{-1} dt^2 + H_W \big(d(x^5) + (H_W^{-1} - 1)dt\big)^2 \right) \\
&+ H_{D1}^{1/2} H_{D5}^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_3^2) \\
&+ H_{D1}^{1/2} H_{D5}^{-1/2} (d(x^6)^2 + d(x^7)^2 + d(x^8)^2 + d(x^9)^2), \\
H_i =& 1 + \frac{r_i^2}{r}, \quad i = D1, D5, W,
\end{aligned}
\tag{۲۱۶}
$$

که r_i ها پارامترهای با بعد طول هستند که به بارهای $Dp - brane$ ها و تکانه کالوزا-کلاین مرتبط خواهند شد. حال ایده کاهش ابعاد کالوزا-کلاین نوشتن این متریک به فرم $ds^2_{9+1} = ds^2_{4+1} + ds^2_{S^1 \times T^4}$ است. برای این کار متریک در ابعاد فشرده را بر حسب میدان‌های ماژولی[۴۸] ρ_1 و ρ_2 به طوری می‌نویسیم که $ds^2_{S^1 \times T^4} = \rho_1 ds^2_{S^1} + \rho_2 ds^2_{T^4}$:

$$
\begin{aligned}
ds^2_{9+1} =& - (H_{D1} H_{D5} H_W)^{-2/3} + (H_{D1} H_{D5} H_W)^{1/3} (dr^2 + r^2 d\Omega_3^2) \\
&+ \rho_1 ds^2_{S^1} + \rho_2 ds^2_{T^4} \\
\rho_1 =& \frac{H_W^{1/2}}{H_{D1}^{1/4} H_{D5}^{1/4}}, \quad \rho_2 = \frac{H_{D1}}{H_{D5}}.
\end{aligned}
\tag{۲۱۷}
$$

اگر خواهان این شویم که میدان‌های ماژولی ثابت باشند. آنگاه ds^2_{4+1} تنها به مختصات غیر فشرده $x^0, ..., x^4$ وابسته خواهد بود و ما متریک ابرگرانش $(4+1)$-بعدی برای ابرریسمان نوع IIB را بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
ds^2_{4+1} = -\lambda^{-2/3} dt^2 + \lambda^{1/3} (dr^2 + r^2 d\Omega_3^2), \\
\lambda = H_{D1} H_{D5} H_W = \prod_{i=1}^{3} \left(1 + \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right).
\end{aligned}
\tag{۲۱۸}
$$

همانطور که جلوتر بیش‌تر توضیح خواهیم داد این متریک‌ها سیاه‌چاله‌های اکستریمال $(4+1)$-بعدی با 3 بار متفاوت هستند. مشابه سیاه‌جاله‌های رایزنر-نوردستروم اکستریمال که در فصل دوم دیدیم این سیاه‌چاله‌ها نیز دمای هاوکینگ صفر دارند و تابش نمی‌کنند. در نتیجه این موجودات، موجوداتی پایدار هستند، که علامتی از درستی فرایند کاهش بعد است.

در مختصات بالا اکستریمال بودن سیاه‌جاله جندان واضح نیست اما مقایسه با رایزنر-نوردستروم $(4+1)$-بعدی اکستریمال می‌تواند کمک کننده یاشد. اگر در ۳۹ قرار دهیم $d = 4$ و $q = \mu$ آنگاه داریم:

$$
ds^2 = -\left(1 - \frac{2\mu}{r^2} + \frac{\mu^2}{r^4}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\mu}{r^2} + \frac{\mu^2}{r^4}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2. \tag{۲۱۹}
$$

ریشه‌های ۴۱ در این حالت به صورت:

$$
r_0 := r_+ = r_- = \sqrt{\mu} = \left(\frac{4 G_{4+1} M}{3\pi} \right)^{1/2}, \tag{۲۲۰}
$$

[۴۸] moduli

خواهند بود. با جای‌گذاری این ریشه‌ها در متریک بالا می‌توان آن‌را باز نویسی کرد:

$$ds^2 = -\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^2 dt^2 + \left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2. \qquad (۲۲۱)$$

در نهایت اگر تغییر مختصات $\tilde{r} = \sqrt{r^2 - r_0^2}$ را اعمال کنیم و ابرو را برداریم داریم:

$$ds^2 = -\left(1+\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-2} dt^2 + \left(1+\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2). \qquad (۲۲۲)$$

در این‌جا می‌توان به وضوح دید که سیاه‌چاله اکستریمال رایزنر-نوردستروم بالا حالت خاصی از ۲۱۸ است که در آن $r_i = r_0$ است. در مختصات ۲۲۲ و ۲۱۸ افق در $r = 0$ واقع شده است. این بیان می‌کند که در ۲۱۸ نیز افق در این نقطه قرار دارد. اگر در ۲۱۸، r را به صفر میل دهیم متریک به فرم زیر در خواهد آمد:

$$ds^2_{horizon} = (r_1 r_2 r_3)^2 d\Omega_3^2. \qquad (۲۲۳)$$

این بیان می‌کند که افق کروی با شعاع $r_1 r_2 r_3$ داریم و مساحت آن به سادگی قابل محاسبه است:

$$Area_{horizon} = \mathcal{A}_3 r_1 r_2 r_3 = 2\pi^2 r_1 r_2 r_3. \qquad (۲۲۴)$$

همان‌طور که پیش‌تر گفتیم r_i ها در بالا به 3 بار سیاه‌چاله مرتبط خواهند شد و در نبود بارها این پارامترها صفر می‌شوند. با صفر شدن این پارامترها مساحت بالا هم صفر خواهد شد و این یک تست برای سازگاری فشرده سازی و انتخاب بارهای ماست، چرا که اگر تعداد بارهای کمتری انتخاب می‌کردیم موجودی با شعاع افق محدود و تکینگی غیر لخت بدست نمی‌آوردیم. برای یافتن ارتباط بین r_i ها و بارها، باز از حالت خاص رایزنر-نوردستروم استفاده می‌کنیم. بار کل سیاه‌چاله ریسمانی ما $q = Q_{D1} + Q_{D5} + n$ است و از آن‌جایی که اکستریمال و BPS است داریم: $\mu = M_1 + M_2 + M_3$ (در ادامه خواهیم دید که این جرم‌ها چه چیزهایی هستند، اما اکنون صرفا فرض کردیم 3 جرم متفاوت داریم). حال در ۲۱۸ قرار می‌دهیم $r_1 = r_2 = r_3$ به طوری که $r_0 = r_i, \forall i$ و همچنین سه بار را برابر می‌گیریم: $Q_{D1} = Q_{D5} = n$ به طوری که $q = 3q_i = \mu = 3M_i$. علاوه بر این‌ها دقت می‌کنیم که از ۲۲۰ نتیجه می‌شود که: $\mu = \frac{3\pi r_0^2}{4G_{4+1}}$. پس با مقدار دهی‌های مد نظرمان می‌توانیم بنویسیم:

$$M_i = \frac{\pi r_i^2}{4G_{4+1}}. \qquad (۲۲۵)$$

در $(9+1)$-بعد ثابت گرانش به صورت $G_{9+1} = 8\pi^6 g^2 l_s^2$ داده می‌شود. با فشرده سازی روی $T^4 \times S^1$ اگر حجم T^4 را $(2\pi)^4 V$ و حجم S^1 را $2\pi R$ بگیریم، می‌توانیم ثابت گرانش بعد پایین‌تر را محاسبه کنیم [۱۲]:

$$G_5 = \frac{G_{10}}{(2\pi)^5 RV} = \frac{\pi g^2 l_s^8}{4RV}. \qquad (۲۲۶)$$

حال با استفاده از ۲۲۵ و معادله بالا r_i ها را به جرم‌ها ربط می‌دهیم:

$$r_i^2 = \frac{4G_N M_i}{\pi} = \frac{g^2 l_s^8}{RV} M_i. \tag{۲۲۷}$$

می‌دانیم که برای ریسمان‌ها می‌توان کشش را به چگالی جرمی ربط داد، همین ارتباط برای $D-brane$ ها هم وجود دارد. برای $D-brane$ های فشرده مد نظر ما، می‌توان به طور مستقیم خود جرم را با ضرب حجم ابعاد فشرده در کشش در بار بدست آورد (به یاد می‌آوریم که بار $Dp-brane$ ها را با تعداد چرخش حول ابعاد فشرده محاسبه کردیم، پس عملا حجم آن‌ها تعداد بار در حجم ابعاد فشرده است). کشش یک $Dp-brane$ مشابه ریسمان‌ها، با استفاده از حد انرژي پایین کنش آن قابل محاسبه است و برابر است با:

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^2 g l_s^{p+1}}. \tag{۲۲۸}$$

با توجه به کشش بالا می‌توانیم حرم‌های مساله مد نظر را با روشی که بیان کردیم حساب کنیم:

$$\begin{aligned} M_1 &= (2\pi R) T_{D1} Q_{D1} = \frac{Q_{D1} R}{g l_s^2}, \\ M_2 &= ((2\pi)^5 RV) T_{D5} Q_{D5} = \frac{Q_{D5} RV}{g l_s^5} \end{aligned} \tag{۲۲۹}$$

هم‌چنین در واحدهای مد نظر ما تکانه کالوزا-کلاین همان جرم منسوب به موج کالوزا-کلاین W است:

$$M_3 = \frac{n}{R}. \tag{۲۳۰}$$

در این مرحله ابرتقارن برایمان راهگشا است. گفته بودیم برای آن‌که بتوان از نتایج بدست آمده در کاپلینگ ضعیف را به سیاه‌چاله که در حد کاپلینگ قوی قرار دارد تعمیم داد، باید مقداری از ابر تقارن نظریه در طی کاهش بعد کالوزا-کلاین باقی بماند. سیاه‌چاله‌ای که ساختیم یک سیاه‌چاله BPS است، در نتیجه محاسبات جرم در بالا که برای $Dp-brane$ های بی برهم‌کنش انجام دادیم، در سیاه‌چاله هم معتبر هستند. با استفاده از ۲۲۷ می‌توانیم r_i ها را بر حسب بارها بنویسیم چرا که بنابر ۲۲۹ و ۲۳۰، جرم‌ها را برحسب بارها داریم($Q_1 := Q_{D1}, Q_2 := Q_{D5} \& Q_3 := n$):

$$r_i^2 = c_i Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{۲۳۱}$$

که در بالا:

$$c_1 = \frac{g l_s^6}{V}, \;\; c_2 = g l_s^2, \;\; c_3 = \frac{g^2 l_s^8}{R^2 V}. \tag{۲۳۲}$$

حال در نهایت می‌توانیم انتروپی سیاه‌چاله ریسمانی را با استفاده از رابطه بکنستاین-هاوکینگ محاسبه کنیم:

$$S_{BH} = \frac{Area}{4G_{4+1}} = \frac{\pi^2}{2G_{4+1}} r_1 r_2 r_3 = 2\pi \sqrt{Q_{D1} Q_{D5} n}. \tag{۲۳۳}$$

۲.۵ شمارش میکروحالت‌ها با روش ساده‌تر

اکنون به مهم‌ترین بخش کارمان رسیده‌ایم که بدست آوردن انتروپی ۲۳۳ با استفاده از شمارش حالات ریسمانی است. همان‌طور که در فصل سوم دیدیم، در نظریه ریسمان قادر هستیم میکروحالت‌ها را در حد کاپلینگ ضعیف و نبود برهم‌کنش‌ها بشماریم. هم‌چنین بیان کردیم که اگر نظریه ابرتقارن داشته باشد، این امکان وجود دارد که نتایج در برهم‌کنش خاموش را به حالت کاپلینگ بالا مانند سیاه‌چاله‌ها تعمیم دهیم.
در عملیات فشرده سازی که انجام دادیم ابعاد مربوط به مختصات $x^5, ..., x^9$ را حول دایره‌هایی فشرده کردیم. در نتیجه برای ناظری که تئوری کاهیده را در $(1+4)$- بعد باقی مانده می‌بیند، $D-brane$ ها به صورت نقاطی دیده می‌شوند. برای ساخت چنین صورت‌بندی انتخاب‌های زیادی وجود ندارد، به طور مثال می‌شد فشرده سازی را روی مختصات دیگری، مثل $x^4, x^6, ..., x^9$ انجام داد اما به سادگی می‌توان دید که چنین انتخاب‌هایی تاثیری روی بارهای Q_{D1} و Q_{D5} ندارد. در نتیجه نمی‌توانند منشا انتروپی بدست آمده باشند. اگر چنین است پس انتروپی از کجا می‌آید؟
به خاطر می‌آوریم که سیاه‌چاله ریسمانی بار دیگری داشت که آن‌را با n نشان دادیم. ریشه این بار کوانتش تکانه به دلیل فشرده سازی روی S^1 در راستای x^5 بود. این تکانه توسط ریسمان‌های بازی حمل می‌شود که به $D-brane$ های مد نظر متصل شده‌اند. حال واضح است که انتروپی از کجا ظاهر می‌شود: راه‌های زیادی برای متصل کردن ریسمان به $D1-brane$ و $D5-brane$ ها وجود دارد. ریسمان‌های $(1,1)$ را داریم که دو سر آن‌ها روی $D1-brane$ است، ریسمان‌های $(5,5)$ را داریم که دو سر آن‌ها روی $D5-brane$ است و ریسمان‌های $(5,1)$ و $(1,5)$ را داریم که از یک نوع از $brane$ ها به نوع دیگری متصل شده‌اند. چون $D1-brane$ و $D5-brane$ های مد نظر در ابعاد فشرده زندگی می‌کنند، منطقی است که ریسمان‌های مد نظر و متصل به آن‌ها در راستاهای فشرده $x^5, ..., x^9$ تکانه گسسته کالوزا-کلاین داشته باشند. n واحد تکانه کل از تکانه صورت بندی‌های ممکن اتصال این ریسمان‌های باز به این $Dp-brane$ ها بدست می‌آید. به طور دقیق‌تر با استفاده از ابرتقارن می‌توان اثبات کرد [۱۸] که ریسمان‌ها حتما باید تکانه خود را در راستای x^5 و نه در سایر راستاهای فشرده داشته باشند. هم‌چنین باید دقت کرد که از آن‌جایی که $Dp-brane$ ها در راستای x^5 در اثر هر وابرسانی و در نتیجه انتقال ناوردا هستند نمی‌توانند تکانه‌ای در این راستا داشته باشند.
یک نکته دیگر نیز باید در شمارش لحاظ شود که آن را از نظریه ابرریسمان‌ها قرض می‌گیریم. در حد انرژی پایین تئوری ریسمان‌های ابرمتقارن، صورت‌بندی $D1-D5-W$ مد نظر ما با یک نظریه میدان همدیس [۴۹] بر روی یک اوربیفولد[۵۰] که روی فضای S^1 ساخته شده است توصیف می‌شود [۱۸]. در ادامه وقتی روش وفا-استرومینگر را برای شمارش حالت‌ها بیان کنیم بیش‌تر در مورد معنای جمله قبل حرف خواهیم زد، اما الان کافی است این را بفهمیم که نظریه در حد انرژی پایین و ابرگرانش که محدوده مطلوب ماست، با یک نظریه میدان همدیس توصیف می‌شود. در این نظریه میدان، مودهای صفر ریسمان‌های متصل به $D1-brane$ و $D5-brane$ ها زندگی می‌کنند. نظریه میدان‌های همدیس تحت تبدیلات مقیاس ناوردا هستند. در نتیجه اگر این مودهای ریسمانی قرار باشد چنین نظریه‌ای را توصیف کنند، باید بی‌جرم باشند. با محاسبه برای ریسمان‌های باز متصل به یک $Dp-brane$ و یک $Dq-brane$ در $(1+25)$-بعد، می‌توان دید که عملگر جرم زمانی که دو $brane$ روی هم قرار بگیرند، به صورت زیر داده می‌شود [۱۲]:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\big(N - 1 + \frac{1}{16}(p-q)\big). \quad (۲۳۴)$$

[۴۹] conformal field theory
[۵۰] orbifold

در این صورت می‌توان دید که برای $brane$ های روی هم اگر $|p-q|=16$ باشد، جرم صفر خواهد شد. زمانی که محاسبات را برای ابرریسمان باز در $(9+1)$-بعد تکرار کنیم، می‌توانیم ببینیم که زمانی که $|p-q|=4$ باشد و $brane$ ها روی هم قرار گرفته باشند، جرم صفر خواهد بود.
مشاهده بند قبل بیان می‌کند که برای شمارش حالت‌ها تنها باید ریسمان‌های $(5,1)$ و $(1,5)$ را لحاظ کرد. چرا که این ریسمان‌ها هستند که مودهای بی‌جرم دارند. در نتیجه تنها باید صورت‌بندی های مربوط به ریسمان‌های $(5,1)$ و $(1,5)$ را در نظر گرفت و باید پارش‌های n با در نظر گرفتن $Q_{D1}Q_{D5}$ حالت برای انتخاب $D1-brane$ و $D5-brane$ ها را شمارش کرد.
نکته دیگری که از نظریه $D-brane$ ها در ابرریسمان‌ها قرض می‌گیریم، آن است که برای ریسمان‌های $(5,1)$ و $(1,5)$، 4 حالت پایه تبهگن برای برانگیختگی‌های بوزونی و 4 حالت پایه تبهگن برای برانگیختگی‌های فرمیونی داریم. به زبان دقیق‌تر 4 ابربار از 32 ابربار نظریه ریسمان نوع IIB در حالت BPS ما باقی‌مانده است که متناظر با 4 تبهگنی بوزونی و به طور متناظر 4 تبهگنی فرمیونی است. پس در مجموع $B=4Q_{D1}Q_{D5}$ اندیس بوزونی و $F=4Q_{D1}Q_{D5}$ اندیس فرمیونی خواهیم داشت. اگر فرض کنیم $n\gg Q_1Q_2$ آن‌گاه بنابر ۸۲ داریم:

$$S_{str}ln\,P(N=n;B=4Q_{D1}Q_{D5},F=4Q_{D1}Q_{D5})\simeq 2\pi\sqrt{Q_{D1}Q_{D5}n}. \qquad (۲۳۵)$$

این رابطه عینا با ۲۳۳ یکی شد اما محاسبه بالا دقیق نیست. لزومی ندارد که $n\gg Q_1Q_2$ در حالت کلی برقرار باشد.
می‌توانیم با رویکردی کلی تر دوباره شمارش را تکرار کنیم. با یادآوری توضیحاتی که بعد از ۲۱۴ بیان کردیم، این بار به Q_{D1} تا $D1-brane$ به عنوان یک تک $D1-brane$ که $Q1$ بار حول S^1 پیچیده شده است و به Q_{D5} تا $D5-brane$ به عنوان یک تک $D5-brane$ که $Q5$ بار حول T^5 پیچیده شده است، نگاه می‌کنیم. با این نگاه جدید باید نحوه کوانتش تکانه ریسمان‌ها را تحلیل کنیم. با این وجود که ریسمان‌های $(5,5)$ و $(1,1)$ در شمارش ظاهر نمی‌شوند، نگاه به آن‌ها در فهم نحوه شمارش کمک خواهد کرد. ریسمان $(1,1)$ از روی $D1-brane$ مد نظر به خودش می‌رود، هم‌چنین $D1-brane$، Q_{D1} بار به دور S^1 پیچیده شده است. در نتیجه ریسمان برای بازگشت به نقطه اولیه خود در $D1-brane$ باید $(2\pi R)Q_{D1}$ مسافت را طی کند. این بدان معناست که واحد تکانه به جای $\frac{1}{R}$، $\frac{1}{Q_{D1}R}$ خواهد بود. به طور مشابه ریسمان‌های $(5,5)$ هم واحد $\frac{1}{Q_{D5}R}$ برای تکانه دارند، چراکه همان‌طور که پیش‌تر گفتیم بنابر ابرتقارن تکانه همه ریسمان‌ها در راستای x^5 است. حال باید به ریسمان‌های $(5,1)$ و $(1,5)$ نگاه کنیم. برای سادگی فعلا فرض می‌کنیم که Q_{D1} و Q_{D5} نسبت به هم اول هستند (البته در ادامه این شرط را ضعیف تر می‌کنیم). حال اگر ریسمان $(1,5)$ را در نظر بگیریم، از آن‌جا که تکانه در راستای x^5 است، از خود می‌پرسیم که چه تعداد بار باید حول S^1 بچرخیم تا به نقطه اولیه بازگردیم؟ اگر Q_{D1} بار چرخش کنیم، سر اول ریسمان به نقطه اولیه خود باز می‌گردد اما به دلیل اول بودن بارها نسبت به هم این اتفاق برای سر دوم نمی‌افتد. هم‌چنین اگر Q_{D5} بار بچرخیم، سر دوم به سرجای خود باز می‌گردد ولی با استدلال مشابه این اتفاق برای سر اول نمی‌افتد. با کمی دقت واضح است که کمترین تعداد دورهای لازم برای برگشتن هردو سر به سرجای اولیه خود کمترین مضرب مشترک دو بار است، که در حالت مد نظر ما $Q_{D1}Q_{D5}$ دور است. پس تکانه برای ریسمان‌های $(1,5)$ و $(5,1)$ با واحد $\frac{1}{Q_{D1}Q_{D5}R}$ کوانتیده می‌شود. این نتیجه را می‌توان برای حالتی که دو بار نسبت به هم اول نیستند هم تقریبا درست در نظر گرفت. مثلا اگر بگیریم $Q_{D1}=Q_{D5}=100$، می‌توانیم $D1-brane$ را به دو قسمت تقسیم کنیم که یکی بار $Q_1'=99$ دارد. حال از آن‌جا که Q_5 و Q_1' نسبت به هم اول‌اند، شمارش قبل کار می‌کند و واحد

تکانه $\frac{1}{Q'_{D1}Q_{D5}R}$ خواهد بود که تقریبا برابر با $\frac{1}{Q_{D1}Q_{D5}R}$ است. به طور کلی، برای Q_{D1} و Q_{D5} های بزرگ، می‌توان اعداد نسبت به هم اول $Q'_{D1} < Q_{D1}$ و $Q'_{D5} < Q_{D5}$ را طوری پیدا کرد که $Q'_{D1} \sim Q_{D1}$ و $Q'_{D5} \sim Q_{D5}$.
در این واحد تکانه جدید، تکانه کل را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$p = n(Q_{D1}Q_{D5})\frac{1}{Q_{D1}Q_{D5}R}. \qquad (۲۳۶)$$

پس این بار باید پارش‌های $nQ_{D1}Q_{D5}$ را بشماریم. از آن‌جایی که در این روی‌کرد تنها یک $D1-brane$ و $D5-brane$ داریم و بنابر بحث‌های فصل چهارم که نشان دادیم ریسمان‌ها کوچک تمایل به پیوستن و تشکیل یک ریسمان بلند دارند، یک ریسمان بلند بین این دو $brane$ متصور می‌شویم. مشابه قبل اندیس‌های فرمیونی و بوزونی را از ابرتقارن داریم ولی این بار $F=4$ و $B=4$ است. حال می‌توانیم انتروپی را از ۸۲ محاسبه کنیم:

$$S_{str} = ln\, P(N = Q_{D1}Q_{D5}n; B=4, F=4) \simeq 2\pi\sqrt{Q_{D1}Q_{D5}n}. \qquad (۲۳۷)$$

با آن‌که نتیجه مشابه قبل شد، اما این بار نیازی به فرض اضافی $n \gg Q_1Q_2$ نشد و تنها فرض ما $Q_{D1}Q_{D5}n \gg 1$ است که به دلیل نداشتن رابطه‌ای میان بارها نمی‌توان آن‌را ضعیف تر کرد. با تمام این اوصاف مقدار بدست آمده با ۲۳۳ تطابق کامل دارد.

۳.۵ شمارش در نظریه میدان همدیس دوگان و روش وفا-استرومینگر

در نهایت در این بخش روشی که خود وفا و استرومینگر [۴] برای شمارش حالات استفاده کردند را بیان می‌کنیم. محاسبه‌ای که ما سعی می‌کنیم با دقت دنبال کنیم برای فشرده‌سازی $T^4 \times S^1$ است که در این فصل مفصل آن را توضیح دادیم، اما محاسبات وفا و استرومینگر برای فشرده‌سازی روی $K3 \times S^1$ انجام شده است که اندکی پیچیده‌تر است. ما ابتدا محاسبات خود را توضیح می‌دهیم و در نهایت نتیجه‌ی وفا و استرومینگر را برای فشرده‌سازی $K3 \times S^1$ نیز بیان می‌کنیم.
همان‌طور که پیش‌تر اشاره کردیم صورت‌بندی $D1-D5-W$ مد نظر ما با یک نظریه میدان همدیس روی اوربیفولدی که توسط S^1 ساخته می‌شود توصیف می‌شود. هم‌چنین گفتیم که میدان‌های توصیف کننده این نظریه میدان، معادل با مودهای صفر ریسمان‌های باز متصل به $D1-brane$ و $D5-brane$ ها هستند. یک اوربیفولد از نظر ریاضیاتی به عنوان خمینه‌ای تعریف می‌شود که به طور توپولوژیک رفتاری مثل فضای خارج قسمتی $\mathcal{M}/\mathcal{G}$ دارد که در آن $\mathcal{M}$ یک خمینه مجهز به یک متریک و $\mathcal{G}$ گروه ایزومتری‌های این خمینه است. اگر خمینه‌ای (شبه)-ریمانی با یک گروه ایزومتری داشته باشیم و نقاطی که با نگاشت‌های ایزومتری به هم می‌روند را در نظر بگیریم. برای این نقاط یک رابطه هم‌ارزی به عنوان نقاطی که با ایزومتری به هم متصل می‌شوند قابل تعریف است. سپس می‌توان از کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه یک فضای توپولوژیک ساخت که به دلیل آن‌که نقاط روی ایزومتری روی آن یکی شده‌اند، متریک خمینه مادر $\mathcal{M}$ را به ارث می‌برد. اوربیفولد با صرف نظر از جزئیات بیش‌تر، چنین فضایی است.
در نظریه ریسمان خمینه $\mathcal{M}$، فضا-زمانی است که نظریه روی آن تعریف شده است. با توجه به بحث‌هایی که تاکنون در مورد فشرده‌سازی کرده‌ایم، می‌دانیم که اگر $Q_{D1}Q_{D5}$ تا ریسمان را در نظر بگیریم، این صورت‌بندی

معادل یک ریسمان است که $Q_{D1}Q_{D5}$ بار حول S^1 چرخیده باشد. پس می‌توانیم نظریه خود را به عنوان ضرب تنسوری $Q_{D1}Q_{D5}$ تا تئوری تک ریسمان بگیریم که حول S^1 می‌چرخند و جای‌گشت‌های این ریسمان‌های ایزومتری‌های تئوری خواهند بود. در این نظریه قسمتی که مربوط به یک ریسمان بلند که $Q_{D1}Q_{D5}$ بار حول S^1 چرخیده است برای ما اهمیت دارد. چرا که پیش‌تر گفته بودیم تک ریسمان‌ها بنابر محاسبه انتروپی تمایل به بهم پیوستن و ساختن یک ریسمان بلند دارد. در نتیجه باید برانگیختگی‌های این ریسمان بلند حول S^1 را برای یافتن تقریب خوبی از انتروپی سیاه‌چاله، شمارش کنیم. پس سوال مد نظر شمارش تعداد پارش‌های این ریسمان بلند حول S^1 است که به تکانه $\frac{n}{R}$ بیانجامد.
یک نکته دیگر که حائز اهمیت است، آن است که همان‌طور که گفتیم برای داشتن حالات BPS باید 4 مود صفر فرمیونی و 4 مود صفر بوزونی داشته باشیم. برای سادگی حالات فرمیونی در ناحیه راموند R را می‌شماریم (در ادامه خواهیم دید که این انتخاب از کلیت نخواهد کاست).

ابزاری که در شمارش حالات به کارمان می‌آید، تابع مولد است. توابع مولد به ما اجاره می‌دهند که تعداد حالات با یک انرژي مشخص که آن‌ها را با d_N نشان می‌دهیم، شماریم. این تعداد حالات به صورت ضرایب بسط تابع مولد ظاهر می‌شوند:

$$G(w) = \sum_{N=0}^{\infty} d_N w^N. \tag{۲۳۸}$$

قبلا مثال‌هایی برای این توابع را برای شمارش حالات در ناحیه R و NS دیده‌ایم. برای محاسبه ضرایب و در نتیجه تعداد حالات، می‌تواند تابع بالا را از $w \in \mathbb{R}$ به $w \in \mathbb{C}$ گسترش تحلیلی داد. سپس $G(w)$ به عنوان یک تابع تحلیلی مختلط با بسط لوران ۲۳۸ داده شده است و ضرایب بسط را به سادگی می‌توان با انتگرال‌گیری مختلط حول مبدا بدست آورد:

$$d_N = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{G(w)}{w^{N+1}}dw. \tag{۲۳۹}$$

ابزار دیگری که باید استفاده کنیم، تقریب نقطه زینی برای انتگرال‌های مختلط است که با آن بتوانیم انتگرال بالا را برای N بزرگ تقریب بزنیم. سوالی که به دنبال حل آن هستیم گرفتن انتگرالی به فرم:

$$I = \int dw\, g(w)e^{Nf(w)}, \quad for\ N \gg 1, \tag{۲۴۰}$$

که در آن f و g توابع مختلط تحلیلی هستند، است. ما به دنبال نقطه زینی w_* هستیم که در آن $f'(w_*) = 0$.
از آن‌جایی که همواره می‌توان کانتور انتگرال‌گیری را طوری انتخاب کرد که از نقطه زینی عبور کند، انتظار داریم که انتگرال در حد $N \gg 1$ با نقطه زینی داده شود. حال توابع f و g را حول این نقطه بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(w) &\simeq f(w_*) + \frac{1}{2}f''(w_*)(w-w_*)^2, \\ g(w) &\simeq g(w_*). \end{aligned} \tag{۲۴۱}$$

حال بازتعریف می‌کنیم:

$$w - w_* := re^{i\phi}, \quad f''(w_*) := |f''(w_*)e^{i\theta}|. \tag{۲۴۲}$$

سپس این تعاریف رو تقریب‌های بالا را در ۲۴۰ جای‌گذاری می‌کنیم. اکنون انتگرالی با دو فاز مختلط داریم، اما می‌توانیم یکی از آن‌ها را بدون از بین رفتن کلیت حذف کنیم و تنها در ϕ آزادی داشته باشیم. اگر انتخاب کنیم $\theta + 2\phi = \pi$ تنها یک وابستگی فازی باقی می‌ماند و خواهیم داشت:

$$I \simeq g(w_*)e^{Nf(w_*)}e^{i\phi} \int dr e^{-\frac{1}{2}N|f''(w_*)|r^2}. \tag{۲۴۳}$$

انتگرال درون عبارت بالا، یک انتگرال گاوسی است و به سادگی قابل محاسبه است. پس داریم:

$$I \simeq g(w_*)e^{Nf(w_*)}e^{i\phi} \left(\frac{2\pi}{N|f''(w_*)|} \right)^{1/2}. \tag{۲۴۴}$$

عبارت بالا، تقریب نقطه زینی برای انتگرال‌های مختلط به فرم ۲۴۰ است.

اکنون باید تابع مولد ابرریسمان‌های نوع II را در نظر بگیریم. همان‌طور که پیش‌تر هم گفته‌ایم، ابرریسمان‌های نوع II با شاخه کردن و انتخاب حالات از نواحی R و NS ساخته می‌شوند. در حالت مد نظر ما 4 مود فرمیونی و 4 مود بوزونی مد نظر است. توابع مولد این دو ناحیه را برای این مود ها را می‌شناسیم:

$$\begin{aligned} G_{NS}(w) &= \frac{1}{2\sqrt{w}} \left(\prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1 + w^{m-1/2}}{1 - w^m} \right)^4 - \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1 - w^{m-1/2}}{1 - w^m} \right)^4 \right), \\ G_R(w) &= 16 \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1 + w^m}{1 - w^m} \right)^4. \end{aligned} \tag{۲۴۵}$$

در حد N های بزرگ برای هر دوی این نواحی داریم: $\alpha' M^2 \simeq N$. پس عملا در این حد تفاوتی ندارد که کدام ناحیه را بشماریم. یعنی به جای آنکه فرض کنیم نصف حالات از R_- یا R_+ و نصف دیگر از NS_+ آمده اند و سپس تعداد را با در نظر گرفتن تمام آن‌ها بشماریم، می‌توانیم فرض کنیم تمام حالات از ناحیه R آمده اند، که تعداد حالاتش دوبرابر R_+ و R_- است. در نتیجه انتخاب ناحیه R و فرض مصنوعی که تمام حالات از این ناحیه آمده‌اند از کلیت کم نمی‌کند.

حال می‌توانیم حالات را برای ابرریسمان متصل کننده $D1 - brane$ و $D5 - brane$ با $N = Q_{D1}Q_{D5}n$ شمارش کنیم. همان‌طور که گفتیم، تابع مولد ناحیه R را در نظر می‌گیریم. از آن‌جایی که می‌خواهیم چگالی حالات d_N را برای N بزرگ حساب کنیم، باید رفتار تابع مولد را حول نقطه تکینگی‌اش، یعنی $w = 1$ بررسی کنیم. برای این کار از اتحاد ژاکوبی برای تابع تتا استفاده می‌کنیم:

$$\theta_4(\tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \theta_2(-1/\tau), \tag{۲۴۶}$$

که در بالا $w := e^{i\pi\tau}$. برای نمایش‌های زیر از تابع تتا:

$$\begin{aligned}\theta_4(\tau) &= \prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-w^m}{1+w^m}\right).\\ \theta_2(\tau) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w^{(m-1/2)^2},\end{aligned} \tag{۲۴۷}$$

با استفاده از تابع مولد ناحیه R و اتحاد ژاکوبی داریم:

$$\begin{aligned}G_R(w) = 16(\theta_4(\tau))^{-4} &= 16\left(\frac{ln\,w}{\pi}\right)^2\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi^2}{ln\,w}(m-1/2)^2}\right)^{-4}\\ &= 16\left(\frac{ln\,w}{\pi}\right)^2 e^{\frac{-\pi^2}{ln\,w}}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi^2}{ln\,w}(m^2-m)}\right)^{-4}.\end{aligned} \tag{۲۴۸}$$

در نتیجه در $w \to 1$، داریم:

$$G_R(w\to 1) \sim \left(\frac{ln\,w}{\pi}\right)^2 e^{\frac{-\pi^2}{ln\,w}}. \tag{۲۴۹}$$

پس می‌توان با روش نقطه زینی، انتگرال مربوط به چگالی حالات را محاسبه کرد:

$$d_N \simeq \oint \frac{dw}{2\pi i}\frac{1}{w}\left(\frac{ln\,w}{\pi}\right)^2 e^{\frac{-\pi^2}{ln\,w}-N\,ln\,w}. \tag{۲۵۰}$$

حال به دنبال نقطه زینی می‌گردیم:

$$f'(w) = \frac{1}{w}\frac{d}{d\,ln\,w}\left(\frac{-pi^2}{ln\,w} - N\,ln\,w\right) = 0, \tag{۲۵۱}$$

ریشه‌ای را انتخاب می‌کنیم که برای آن، N مثبت باشد:

$$ln\,w_* = \frac{-\pi}{\sqrt{N}}. \tag{۲۵۲}$$

با استفاده از این نقطه زینی و ۲۴۴ داریم:

$$d_N \simeq \frac{1}{2}N^{-7/4}e^{2\pi\sqrt{N}}. \tag{۲۵۳}$$

نکته‌ای که می‌توان در این‌جا به آن دقت کرد، آن است که نتیجه بالا یک نتیجه کلی است و ربطی به صورت‌بندی $brane$ های مد نظر ندارد. مثلا برای صورت‌بندی های به غیر از $D1-D5-W$ مانند $D2-D6-$

$NS5-W$ که روی آن در این نوشته بحث نکردیم هم می‌توان با رابطه بالا حالات را شمرد. از این جهت روش توابع مولد کاربردی تر است و تنها به تراز جرمی N ربط دارد.
برای سیستم $D1-D5-W$، همان‌طور که در ابتدای این بخش گفتیم، کافی است $N=Q_{D1}Q_{D5}n$ را در ۲۵۳ قرار دهیم:

$$d(Q_{D1},Q_{D5},n)\sim(Q_{D1}Q_{D5}n)^{-7/4}e^{2\pi\sqrt{Q_{D1}Q_{D5}n}}. \quad (۲۵۴)$$

در نهایت انتروپی برای سیستم بالا قابل محاسبه است:

$$S=ln\,d(Q_{D1},Q_{D5},n)\sim 2\pi\sqrt{Q_{D1}Q_{D5}n}-\frac{7}{4}ln\,(Q_{D1}Q_{D5}n). \quad (۲۵۵)$$

این نتیجه از دو لحاظ دارای اهمیت است. اول این‌که تا مرتبه اول با انتروپی ماکروسکوپیک ۲۳۳ تطابق دارد. دوم این‌که این عبارت اولین تصحیح به انتروپی را که از ابرگرانش بدست آمده است، بدست می‌دهد. این تصحیح ریسمانی به صورت لگاریتم مساحت افق رویداد است و باور بر این است که چنین تصحیحی در حالت کلی باید همواره وجود داشته باشد.
در نهایت کوتاه به محاسبه وفا و استرومینگر با فشرده‌سازی روی $K3\times S^1$ اشاره می‌کنیم. با استفاده از کنش ابرگرانشی و فشرده کردن 5 بعد فضایی روی $K3\times S^1$ سیاه‌چاله ای که وفا و استرومنیگر در نظر گرفته بودند به صورت زیر بدست می‌آید:

$$ds^2=-\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^2dt^2+\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-2}dr^2+r^2d\Omega_3^2, \quad (۲۵۶)$$

که در آن $r_0=\left(\frac{8Q_HQ_F^2}{\pi^2}\right)^{1/6}$ و Q_H و Q_F بارهای سیاه‌چاله هستند. واضح است که این سیاه‌چاله اکستریمال است و با استفاده از قانون بکنستاین-هاومینگ انتروپی آن قابل محاسبه است:

$$S_{BH}=2\pi\sqrt{\frac{Q_HQ_F^2}{2}}. \quad (۲۵۷)$$

برای چنین صورت‌بندی‌ای، وفا و استرومینگر سپس مشابه محاسبات ما چگالی حالات را با توابع مولد بدست آوردند:

$$d(Q_F,Q_H)\sim exp(2\pi\sqrt{Q_H(\frac{1}{2}Q_F^2+1)}). \quad (۲۵۸)$$

و با استفاده از آن انتروپی را محاسبه کردند:

$$S=ln\,d(Q_F,Q_H)\sim 2\pi\sqrt{Q_H(\frac{1}{2}Q_F^2+1)}. \quad (۲۵۹)$$

که تا مرتبه اول با انتروپی ماکروسکوپی تطابق دارد.

۶ نتیجه‌گیری

امکان محاسبه انتروپی سیاه‌چاله و یافتن منشا میکروسکوپی آن از موفقیت‌های نظریه ریسمان است. این محاسبه تاکنون برای برخی سیاه‌چاله‌ها انجام شده است و هدف پیش‌رو انجام این محاسبه برای سیاه‌چاله‌های غیر اکستریمال و هم‌چنین سیاه‌چاله‌ها در $(1+3)$-بعد است. با آن‌که تاکنون قدم‌هایی برای محاسبه انتروپی برای سیاه‌چاله‌های غیر اکستریمال برداشته شده است، اما هم‌چنان محاسبه انتروپی برای این موجودات چندان ساده نیست. علاوه بر این محاسبات مربوط به انتروپی سیاه‌چاله $(1+3)$-بعدی شوارزشیلد در نظریه ریسمان هم‌چنان در تطابق کیفی و نادقیق با انتروپی ماکروسکوپی است و راه زیادی تا محاسبه دقیق انتروپی برای این موجودات پیش رو است. هم‌چنین نظریه ریسمان تصویری نسبتا روشن از درجه آزادی‌های یک سیاه‌چاله زمانی که در کاپلینگ صفر قرار دارند بدست می‌دهد اما یکی از سوالاتی که همواره مطرح است رفتار این درجات آزادی بعد از تشکیل سیاه‌چاله است، که هم‌چنان پاسخی برای آن نداریم.

یکی از مسائل مهمی که در فیزیک نظری و گرانش مطرح است مسائله پارادوکس اطلاعات سیاه‌چاله است. این پارادوکس بیان می‌کند که از آن‌جایی که تابش سیاه‌چاله، از توزیع گرمایی پیروی می‌کند، پس از تبخیر آن اطلاعات مربوط به اجرامی که به آن سقوط کرده‌اند از جهان پاک می‌شود (چرا که توزیع گرمایی اطلاعات نزدیک به صفر دارد). بنابر اصول موضوعه مکانیک کوانتومی چنین اتفاقی با تحول یکانی سیاه‌چاله در تناقض است. محاسبات نظریه ریسمان با صورت‌بندی‌های $brane$ ها، یک راه حل برای این مساله پیشنهاد می‌کند. همان‌طور که دیدیم این راه حل بیان می‌کند که سیاه‌چاله‌ها در حقیقت موجوداتی هموار و بدون افق و تکینگی در ابعاد بالاتر هستند. اما از دید ناظر موثر ماکروسکوپی در ابعاد پایین‌تر چنین صورت‌بندی یک سیاه‌چاله می‌شود. یعنی با این‌که بنظر می‌رسد که اطلاعات برای ناظر بعد کم‌تر گم شده باشد، چنین مشکلی زمانی که به درجات آزادی میکروسکوپی نگاه می‌کنیم وجود ندارد.

پس نتایج بدست آمده می‌تواند انگیزه بخش برای جدی گرفتن نظریه ریسمان به عنوان یک نامزد مناسب برای یک نظریه گرانش کوانتومی باشد، در عین حال باید دقت کنیم که هم‌چنان مسائل زیادی بی‌جواب باقی‌مانده‌اند و نباید این نظریه را کامل دانست.

مراجع

[۱] S.W. Hawking، Particle creation by black holes، Comm. Math. Phys. ۴۳ (۱۹۷۵) ۱۹۹–۲۲۰.

[۲] J. Bekenstein، Black holes and entropy، Phys. Rev. D۷ (۱۹۷۳) ۲۳۳۳؛ Generalized second law of thermodynamics in black hole physics، Phys. Rev. D۹ (۱۹۷۴) ۳۲۹۲.

[۳] S. Hawking، "Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse"، Phys. Rev. D ۱۴ (۱۹۷۶) ۲۴۶۰.

[۴] A. Strominger and C. Vafa، "Microscopic origin of the Bekenstein–Hawking entropy،" Phys. Lett. B۳۷۹ (۱۹۹۶) ۹۹–۱۰۴، arXiv:hep-th/۹۶۰۱۰۲۹ [hep-th].

[۵] L. Susskind، L. Thorlacius، and J. Uglum، “The Stretched horizon and black hole complementarity،” Phys. Rev. D۴۸ (۱۹۹۳) ،۳۷۶۱–۳۷۴۳ arXiv:hep-th/۹۳۰۶۰۶۹ [hep-th].

[۶] H.S. Reall، Black Holes.

[۷] P. K. Townsend، Black holes، gr-qc/۹۷۰۷۰۱۲.

[۸] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis، The large scale structure of space-time، Cambridge University Press .(۱۹۷۳)

[۹] J.M. Bardeen، B. Carter and S.W. Hawking، The four laws of black hole mechanics، Comm. Math. Phys. ۳۱ (۱۹۷۳) .۱۶۱

[۱۰] F. R. Tangherlini، Il Nuovo Cimento ،۲۷ ۶۳۶ (۱۹۶۳)

[۱۱] R. C. Myers and M. J. Perry، “Black Holes in Higher Dimensional Space-Times،” Annals Phys. ۱۷۲ (۱۹۸۶) .۳۰۴

[۱۲] B. Zwiebach، A first course in string theory. Cambridge University Press، .۲۰۰۶

[۱۳] R. Hagedorn، “Statistical thermodynamics of strong interactions at high-energies،” Nuovo Cim. Suppl. ۳ (۱۹۶۵) .۱۸۶–۱۴۷

[۱۴] J. Lindesay، L. Susskind، An Introduction to Black Holes، Information and the String Theory Revolution: The Holographic Universe، World Scientific .(۲۰۰۴)

[۱۵] L. Susskind، “Strings، black holes and Lorentz contraction،” Phys. Rev. D۴۹ (۱۹۹۴) ،۶۶۱۱–۶۶۰۶ arXiv:hep-th/۹۳۰۸۱۳۹ [hep-th].

[۱۶] S. Weinberg، Lectures on Quantum Mechanics

[۱۷] . AA. Tseytlin، Harmonic superpositions of M-branes

[۱۸] Polchinski، J. .(۱۹۹۸) String Theory in two volumes. Cambridge: Cambridge University Press.