

به نام خدا

تمرین سری اول مکانیک کوانتوم 2

مهلت تحویل: شنبه 7 اسفند ماه _ ساعت 13:30 _ کلاس ف 2

در پاسخ برگ‌های خود نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی و نام TA خود را حتما ذکر کنید.

سوال اول

سیستمی را در نظر بگیرید که در ابتدا در حالت زیر قرار دارد :

$$\psi(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}} Y_{1,-1}(\theta, \varphi) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} Y_{1,0}(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{5}} Y_{1,1}(\theta, \varphi)$$

الف) کمیت زیر را بیابید.

$$\langle \psi | L_+ | \psi \rangle$$

ب) اگر عملگر تکانه زاویه‌ای در راستای Z اندازه‌گیری شود، آن گاه چه مقادیری و با چه احتمالی به دست خواهند آمد؟

ج) اگر پس از اندازه‌گیری L_z ، مقدار زیر را به دست آوریم

$$l_z = -\frac{h}{2\pi}$$

آن گاه کمیت‌های زیر را حساب کنید.

$$, \Delta L_y, \Delta L_x \Delta L_y \Delta L_x$$

سوال دوم

همیلتونی یک سیستم به صورت $H = \epsilon \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ است. که در آن ϵ یک ثابت با بعد انرژی است و $\vec{n}$ یک بردار یکه دلخواه است و σ_x, σ_y و σ_z ماتریس‌های پائولی هستند.

الف) ویژه بردارها و ویژه حالت‌های این همیلتونی را به دست آورید و ماتریس یکانی که این همیلتونی را قطری می‌کند بنویسید.

ب) عمگر تحول را محاسبه کنید.

می‌دانیم عملگر تحول به صورت زیر است:

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$$

راه ساده‌تر این است که ابتدا ثابت کنید:

$$e^{-i\alpha \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \alpha I - i \sin \alpha (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})$$

ج) اگر حالت اولیه سیستم به صورت $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ باشد. احتمال اینکه از اندازه گیری S_z مقدار $-\frac{\hbar}{2}$ ، به دست آید چقدر است؟

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

د) حالت سیستم را در زمان t به دست آورید. احتمال اینکه از اندازه‌گیری S_z مقدار $-\frac{\hbar}{2}$ به دست آید چقدر است؟

سوال سوم

الف) ویژه مقدارهای یک چرخنده متقارن حول محور را محاسبه کنید و تبهگنی هر تراز انرژی را بیابید. یادآوری می‌شود که همیلتونی یک چرخنده متقارن حول محور به صورت زیر است:

$$H = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I_1} + \frac{L_z^2}{2I_2}$$

که در آن I ها گشتاورهای لختی هستند.

ب) از قسمت الف ویژه مقدارهای انرژی برای ترازهای گوناگون $l = 3$ را بیابید.

ج) برای یک چرخنده صلب که $I_1 = I_2 = I$ ، عبارت انرژی و رابطه تبهگنی متناظر را بیابید.

د) عدد کوانتومی مداری l و تبهگنی انرژی متناظر را برای یک چرخنده صلب که بزرگی تکانه زاویه‌ای کل آن $\sqrt{56}h$ است محاسبه کنید.

سوال چهارم

سیستمی را در نظر بگیرید که در ویژه حالت تکانه زاویه‌ای زیر است:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{7}} |1, -1\rangle + A |1, 0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} |1, 1\rangle$$

که در آن A یک ثابت حقیقی است.

الف) مقدار A را طوری بیابید که تابع حالت بهنجار باشد.

ب) مقدار چشم داشتی عملگرهای L_x, L_y, L_z, L^2 را روی حالت داده شده بیابید.

ج) احتمال این که نتیجه‌ی اندازه‌گیری تکانه زاویه‌ای در راستای z ، $\hbar$ باشد را به دست آورید.

د) $\langle 1, m | L_-^2 | \psi \rangle$ و $\langle 1, m | L_+^2 | \psi \rangle$ را محاسبه کنید.

سوال پنجم

ذره‌ی اسپین $3/2$ را تحت تاثیر همیلتونی زیر در نظر بگیرید

$$H = \frac{\epsilon_0}{\hbar^2} (S_x^2 - S_y^2) - \frac{\epsilon_0}{\hbar^2} S_z^2$$

که ϵ_0 ثابتی با بعد انرژی است.

الف) فرم ماتریسی همیلتونی بالا را نوشته و ترازهای انرژی آن را به دست آورید.

ب) ویژه بردارهای همیلتونی را به دست آورید.

ج) اگر سیستم ابتدا در حالت $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ باشد، حالت آن را در زمان t به دست آورید.

سوال ششم

تابع موج زیر را در نظر بگیرید.

$$\psi(\theta, \varphi) = 3\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi} - 2(1 - \cos^2\theta)e^{2i\varphi}$$

الف) $\psi(\theta, \varphi)$ را بر حسب هارمونیکهای کروی بنویسید.

ب) آیا $\psi(\theta, \varphi)$ ویژه حالت L^2 و یا L_z است؟

ج) احتمال اینکه از اندازه گیری L_z ، مقدار $2\hbar$ بدست آید، چقدر است؟