

به نام خدا

تمرین سری دوم مکانیک کوانتوم ۲

مهلت تحویل: شنبه ۲۱ اسفند _ ساعت ۱۳:۳۰ تا ۱۵ _ کلاس ف ۲

لطفا در پاسخ برگ خود نام و نام خانوادگی، شماره دانشجویی و نام TA خود را ذکر کنید.

سوال اول

الف) ویژه بردارهای عملگر اسپین در جهت دلخواه (θ, φ) چیست؟ (می توانید فقط پاسخ نهایی را با توجه به سوال ۲ تمرین سری اول بنویسید.)

ب) عملگر زیر را در نظر بگیرید

$$R_n(\theta) = e^{-i\theta S_n/\hbar}$$

که در آن $\hat{n}$ برداری یکه در صفحه $x-y$ است که با محور x ها زاویه φ می سازد.

اثر این عملگر را بر ویژه بردارهای عملگر اسپین در راستای z حساب کنید و با جواب قسمت الف مقایسه کنید.

ج) $R_n(\theta = 2\pi)$ چیست؟

سوال دوم

با استفاده از ویژگی های ماتریس های پائولی، درستی روابط زیر را نشان دهید.

a) $\{A \cdot \sigma, B \cdot \sigma\} = 2 A \cdot B$

b) $(\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) = A \cdot B + i \sigma \cdot (A \times B)$

c) $e^{i\alpha\sigma_x} \sigma_z e^{-i\alpha\sigma_x} = \sigma_z \cos 2\alpha + \sigma_y \sin 2\alpha$

سوال سوم

تراز های انرژی را برای یک ذره اسپین $\frac{5}{2}$ که هامیلتونی آن با رابطه زیر داده میشود، بیابید.

آیا تراز های انرژی تبهگن اند؟

$$H = \frac{\alpha}{h^2} (S_x^2 + S_y^2) + \frac{\alpha}{h} S_z$$

سوال چهارم

یک ذره ی بدون اسپین با تابع موج زیر در نظر بگیرید

$$\psi = K(x + y + 2z)e^{-\alpha r}$$

که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ میباشد و α و K ثابت های حقیقی هستند.

الف) اندازه ی تکانه زاویه ای کل ذره چقدر میباشد؟

ب) ارزش انتظاری L_z را حساب کنید.

پ) اگر L_z را اندازه گیری کنیم. با چه احتمالی $l_z = +\hbar$ به دست می آید؟

سوال پنجم

ذره اسپین $1/2$ را که با میدان مغناطیسی، تحت هامیلتونی زیر برهمکنش می کند، در نظر بگیرید.

$$H = \begin{cases} -\mu \cdot \mathbf{B} & , \quad \mathbf{B} = B \hat{z} & , \quad 0 \leq t \leq T \\ -\mu \cdot \mathbf{B} & , \quad \mathbf{B} = B \hat{y} & , \quad T \leq t \leq 2T \end{cases}$$

که $\mu = \mu_B \sigma$ و سیستم در لحظه ی اولیه در حالت $|x+\rangle$ است. چقدر احتمال دارد که در $t=2T$ ،

حالت سیستم $|x+\rangle$ باشد؟

سوال ششم

نشان دهید

$$[J_x J_y, J_z] + [J_x, J_y J_z] = i\hbar(J_x^2 - 2J_y^2 + J_z^2)$$

سوال هفتم

دو ذره ی اسپین $\frac{1}{2}$ را در نظر بگیرید.

الف) ویژه حالت های تکانه زاویه ای کل را بنویسید.

حالا فرض کنید دو ذره در حالت زیر باشند.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+, -\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-, -\rangle$$

ب) این حالت را بر حسب ویژه حالت های تکانه زاویه ای کل، بسط دهید.

ج) از اندازه گیری تکانه زاویه ای کل چه مقادیری و هر کدام با احتمالی بدست می آیند.

سوال هشتم

عملگر جایگشت که آنرا با P نشان می دهیم در فضای اسپین دو ذره اثر زیر را دارد.

$$P|+, +\rangle = |+, +\rangle, \quad P|+, -\rangle = |-, +\rangle, \quad P|-, +\rangle = |+, -\rangle, \\ P|-, -\rangle = |-, -\rangle$$

الف) ماتریس مربوط به این عملگر را بنویسید.

ب) نشان دهید اثر این عملگر روی هر حالت دلخواه به صورت زیر است.

$$P|\alpha\rangle|\beta\rangle = |\beta\rangle|\alpha\rangle$$

ج) اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$P = \frac{1}{2}(\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_3 \otimes \sigma_3)$$

که در آن $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ماتریس های پائولی و σ_0 ماتریس همانی در دو بعد است.