سوال اول:

جواب نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

که $u(r)$ جواب معادله‌ی زیر است.

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2}{\hbar^2} m \left[E - \frac{l(l+1)}{2mr^2}\hbar^2 - \frac{m\omega^2}{r} r^2 \right] u_n(r) = 0$$

$$E = \hbar\omega(n + 3/2)$$

انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ $V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$ است.

$$\frac{dV(r)}{dr} = m\omega^2 r$$

پتانسیل مربوط به اسپین-مدار می‌شود:

$$H_{SO} = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{S}\cdot\vec{L} = \frac{\omega^2}{2mc^2} \vec{S}\cdot\vec{L}$$

$$= \frac{\omega^2}{4mc^2} (J^2 - L^2 - S^2)$$

با توجه به H_{SO}، بهتر است حالت‌های ویژه‌ی جمع تکانه‌ی مدار و اسپین را در نظر بگیریم.

آنگاه این حالت را با $|j, m_j\rangle$ نشان دهیم. تصحیح انرژی تا مرتبه‌ی اول به صورت زیر است.

$$\langle j, m_j | H_{SO} | j, m_j \rangle = \frac{\omega^2\hbar^2}{4mc^2}\left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right]$$

$$j = l+s,\ l+s-1,\ \dots,\ |l-s|$$

برای حالت $s = 1/2$

$$j = l + 1/2,\ l - 1/2$$

و جابه‌جایی انرژی به صورت زیر است.

$j = l + 1/2$

$$\hookrightarrow \langle H_{SO} \rangle = \frac{\omega^2\hbar^2}{4mc^2}\left((l+1/2)(l+3/2) - l(l+1) - 3/4 \right) = \frac{\omega^2\hbar^2}{4mc^2} l$$

$$j = l - 1/2 \longrightarrow \langle H_{SO} \rangle = +\frac{\omega^2\hbar^2}{4mc^2}\left((l-1/2)(l+1/2) - l(l+1) - 3/4 \right) = -\frac{\omega^2\hbar^2}{4mc^2}(l+1)$$

$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$

سؤال دوم :

$X = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)$

$P = \sqrt{m\hbar\omega}\left(\frac{a-a^\dagger}{\sqrt{2}\, i}\right)$

$\xrightarrow[\text{طیف}]{} \quad E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \ |n\rangle$

$H' = \frac{(P+P_0)^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 = \hbar\omega\left(b^\dagger b + \frac{1}{2}\right) + \text{Constant}$

$\hat{b} + \beta = \hat{a}$

$\beta \in \mathbb{C}$

$= H_0 + \frac{P_0^2 + 2PP_0}{2m} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \frac{P_0}{m}\frac{\sqrt{m\hbar\omega}}{\sqrt{2}\, i}\left(a - a^\dagger\right) + \frac{P_0^2}{2m}$

$= \hbar\omega\left[\underbrace{(b^\dagger + \beta^*)(b+\beta)}_{b^\dagger b + \beta b^\dagger + \beta^* b + |\beta|^2} + \frac{1}{2}\right] + \frac{P_0}{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}}\left(b + \beta - b^\dagger - \beta^*\right) + \frac{P_0^2}{2m}$

$= \hbar\omega\left[b^\dagger b + \frac{1}{2}\right] + b\underbrace{\left[\hbar\omega\beta^* - iP_0\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}}\right]}_{=0} + b^\dagger\underbrace{\left[\hbar\omega\beta + iP_0\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}}\right]}_{=0}$

$+ \left\{\hbar\omega|\beta|^2 + \frac{P_0^2}{2m} - P_0 i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}}\left(\beta - \beta^*\right)\right\}$

$\longrightarrow \quad \beta = \frac{-iP_0}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}} = \frac{-iP_0}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$

$H = \hbar\omega\left[b^\dagger b + \frac{1}{2}\right] + \left\{\cancel{\hbar\omega}\frac{P_0^2}{2m\cancel{\hbar\omega}} + \frac{P_0^2}{2m} - P_0 i\sqrt{\frac{\cancel{\hbar\omega}}{2m}}\left(\frac{-2iP_0}{\sqrt{2m\cancel{\hbar\omega}}}\right)\right\}$

$= \hbar\omega\left[b^\dagger b + \frac{1}{2}\right]$

$\xrightarrow[\text{طیف}]{} \quad \hbar\omega\left(n' + \frac{1}{2}\right) \quad |n'\rangle$

$a|0\rangle = 0$

$b|0'\rangle = (a-\beta)|0'\rangle = 0$

$\boxed{a|0'\rangle = \beta|0'\rangle}$

$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$

$|0'\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|\right)|0'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|0'\rangle\,|n\rangle$

$\langle n|0'\rangle = \langle 0|\overbrace{\frac{a^n}{\sqrt{n!}}|0'\rangle}^{\beta^n|0'\rangle} = \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|0'\rangle$

$$|0'\rangle = \langle 0|0'\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\langle 0'|0'\rangle = 1 \longrightarrow |\langle 0|0'\rangle|^2 = e^{|\beta|^2}$$

$$|0'\rangle = e^{|\beta|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

احتمال اینکه سیستم در حالت پایه بماند $= |\langle 0'|0\rangle|^2 = e^{|\beta|^2} = e^{P_0^2/4m\hbar\omega}$

$$\beta = \frac{-iP_0}{\sqrt{4m\hbar\omega}} \longrightarrow |\beta|^2 = \frac{P_0^2}{4m\hbar\omega}$$

سوال سوم: $V = -eE\cdot Z = -eE_0 e^{-\gamma t}\hat{Z}$

$$\vec{E}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ E_0 e^{-\gamma t} & t>0 \end{cases}$$

محور Z را در راستای میدان الکتریکی در نظر می‌گیریم

حالت پایه : 1s

$$P(1s \longrightarrow 2p) = |c^{(1)}(t)|^2$$

$$c^{(1)}(t) = \frac{-i}{\hbar}(-eE_0)\int_0^t dt\, \langle 210|Z|100\rangle e^{-\gamma t} e^{i\omega t}$$

$$= \frac{ieE_0}{\hbar}\langle 210|Z|100\rangle \frac{e^{(i\omega-\gamma)t}}{i\omega-\gamma}\Big|_0^t$$

$$= \frac{ieE_0}{\hbar}\langle 210|Z|100\rangle \frac{e^{(i\omega-\gamma)t}-1}{\gamma^2+\omega^2}(-i\omega-\gamma)$$

$$\langle 210|Z|100\rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \int_0^{\infty} r^2 dr\, R_{21} Y_{10}\, r\cos\theta\, R_{10} Y_{00}$$

$$= \frac{2^{15/2}}{3^5} a_0$$

$$P(1s \to 2p) = \left(\frac{eE_0}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{2^{15}}{3^{10}} a_0^2\right) \frac{1}{(\omega^2+\gamma^2)^2} \left| (-i\omega-\gamma)\left(e^{(i\omega-\gamma)t}-1\right)\right|^2$$

$$t \to \infty \qquad e^{-\gamma t} \longrightarrow 0 \qquad \left(e^{(i\omega-\gamma)t}-1\right) \longrightarrow -1$$

$$|-i\omega-\gamma|^2 = \left(\sqrt{\gamma^2+\omega^2}\right)^2 = \omega^2+\gamma^2$$

$$\longrightarrow P(1s \to 2p) = \left(\frac{eE_0}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{2^{15}}{3^{10}} a_0^2\right) \frac{\cancel{\omega^2+\gamma^2}}{(\omega^2+\gamma^2)^{\cancel{2}}}$$

$$= \left(\frac{eE_0}{\hbar}\right)^2 \frac{a_0^2}{\omega^2+\gamma^2} \frac{2^{15}}{3^{10}}$$

$1s \to 2s$ ممنوع $\leftarrow \Delta l = 0$ $P(1s \to 2s) = 0$

سؤال چهارم :

$$H' = \begin{array}{c} |a\rangle \\ |b\rangle \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^* & 0 \end{pmatrix} \delta(t)$$

$$P_{a\to b} = |c^{(1)}(t)|^2 = \left| \frac{-i}{\hbar} \int_0^t \underbrace{\langle b|H'(t)|a\rangle}_{\alpha^* \delta(t)} e^{i\omega_{ba} t'} dt' \right|^2$$

$$= \left| \frac{-i}{\hbar} \alpha^* \right|^2 = \frac{|\alpha|^2}{\hbar^2}$$