خواص آماری گاز فوتونی با رهیافت الکترومغناطیس کلاسیک

فرهنگ لران *(دانشگاه صنعتی اصفهان)* ***سامان مقیمی‌عراقی*** *(دانشگاه صنعتی شریف)*

خواص آماری گاز فوتونی عمدتا با استفاده از مفهوم ذره‌ای فوتون‌ها به دست می‌آید. در این مقاله، بدون استفاده از مفهوم ذره‌ای فوتون‌ها و صرفا با تکیه بر الکترومغناطیس کلاسیک، خواص این گاز را بررسی می‌کنیم. این بررسی را از دو شیوه انجام می‌دهیم. یکی از این دو شیوه شهودی‌تر است و دیگری مبتنی بر روش‌های استاندارد مکانیک آماری. علاوه بر بررسی کلی چنین گازی، نشان می‌دهیم که آهنگ تابش انرژی در واحد زمان از واحد سطح جسم سیاه و همچنین فشار تابشی با چگالی انرژی تابشی متناسب است.

۱- مقدمه

یکی از دستگاه‌هایی که در ترمودینامیک یا فیزیک آماری بررسی می‌شود، گاز فوتونی است. گاز فوتونی مجموعه‌ای از فوتون‌ها است که مثلا در کاواکی گیر افتاده‌اند و با سطح کاواک که دمای T دارد در حال تعادل‌اند. در حالت تعادل، تابش انرژی در واحد سطح در واحد زمان از قانون استفان-بولتزمان پیروی می‌کند، یعنی تابش انرژی متناسب با توان چهارم دمای فوتون‌هاست. در راه رسیدن به قوانینی از این دست دیده می‌شود که چگالی انرژی تابشی با آهنگ تابش انرژی در واحد زمان در واحد سطح دستگاه و همچنین با فشار تابشی آن متناسب است. شیوه‌ای که معمولا به کار می‌رود تا این تناسب را نشان دهد برگرفته از تصویر فوتونی از این دستگاه است. در این رهیافت عمدتا از نگرش‌های نظریه‌ی جنبشی استفاده می‌کنیم، به این معنی که تعداد ذرات برخورد کننده به سطحی دلخواه را در نظر می‌گیریم یا می‌پرسیم از این تعداد ذره چندتایشان چنین خاصیتی دارند یا پرسش‌هایی از این دست. این در صورتی است که پیش از این که اینشتین تصویر ذره‌ای برای نور را در سال ۱۹۰۵ ابداع کند، پلانک به بررسی آماری تابش الکترومغناطیسی پرداخته بود. حتی پیش از آن هم رابطه‌ی بین این کمیت‌ها شناخته شده بود و بنابراین برای به دست آوردن این رابطه‌ها نیازی به تصویر کوانتم‌های نور نیست.

چرا این تناسب‌ها مهم است؟ می‌دانیم الکترومغناطیس کلاسیک با تابش جسم سیاه سازگاری ندارد. در مدل کلاسیک میزان انرژی چنین دستگاهی بی‌نهایت به دست می‌آید، پدیده‌ای که به فاجعه‌ی فرابنفش معروف است. اما جذابیت داستان این است که اگر رابطه‌ی بین انرژی داخلی و فشار را بدانیم می‌توانیم قانون استفان-بولتزمن را به دست آوریم. چگونه؟ فرض کنید با الکترومغناطیس کلاسیک فهمیده‌ایم فشار تابشی متناسب با چگالی انرژی تابشی است. یا به عبارت دقیق‌تر

$$P = u/3. \tag{1}$$

که P فشار و $u = U/V$ چگالی انرژی است. از روی قانون اول ترمودینامیک که می‌گوید $dU = TdS - PdV$ می‌نویسیم

$$\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P. \tag{2}$$

در این جا S آنتروپی دستگاه است. با استفاده از روابط ماکسول ترمودینامیک (و نه قوانین ماکسول الکترومغناطیس) عبارت بالا را می‌توان نوشت

$$\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \quad (3)$$

حالا اگر از رابطه‌ی بین فشار و انرژی استفاده کنیم و همچنین به این توجه کنیم که انرژی کمیتی فزون‌ور است و قاعدتا باید داشته باشیم $U = Vu(T)$، معادله‌ی بالا به شکل معادله‌ی دیفرانسیلی برای $u(T)$ به دست می‌آید:

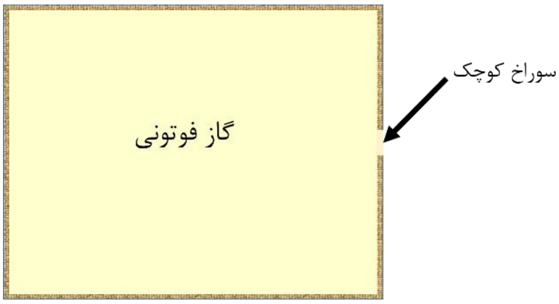
$$T\frac{du}{dT} = 4u, \quad (4)$$

که جوابش رابطه‌ی آشنایی است: $u = AT^4$. یعنی بدون استفاده از مفاهیم مکانیک کوانتمی و صرفا با دانسته‌های کلاسیک می‌توان رابطه‌ی استفان-بولتزمن را به دست آورد. آن‌چه که در این راه نیاز داشتیم اندکی دانش ترمودینامیک بود و این واقعیت که فشار تابشی و چگالی انرژی با هم متناسبند. برای این که خیلی فیزیک کلاسیک را دست بالا نگیریم، این را اضافه می‌کنیم که درست است که رابطه‌ی استفان-بولتزمن را با مکانیک کلاسیک به دست آورده‌ایم، اما حرفی از این که ثابت تناسب یعنی A چه می‌تواند باشد نزده‌ایم. اگر با همین مکانیک کلاسیک پیش برویم، ثابت A در معادله‌ی بالا بی‌نهایت در می‌آید، اما در محاسبه‌های کوانتمی این ثابت محدود است و به دست می‌آید که $A = \frac{\pi^2 k^4}{15c^3\,\hbar^3}$ که با تجربه می‌خواند.

در این نوشتار می‌خواهیم با استفاده از روشی که تنها مبتنی بر الکترودینامیک کلاسیک است نشان دهیم که سه کمیت چگالی انرژی، آهنگ تابشی و فشار تابشی با هم متناسب هستند. در این مسیر، نیاز است که مکانیک آماری را به یک نظریه‌ی میدان کلاسیک اعمال کنیم و فکر می‌کنیم این نوشتار از همین جهت می‌تواند برای علاقه‌مندان به فیزیک جذاب باشد. در این مقاله ابتدا روش معمول را بازگو می‌کنیم و پس از آن به روش الکترومغناطیس کلاسیک می‌پردازیم. از آنجا که اعمال مکانیک آماری به یک نظریه‌ی میدان، محاسبه‌های ریاضی زیادی دارد، ابتدا مساله را با شیوه‌ای شهودی‌تر باز می‌کنیم تا تصویری از داستان داشته باشیم. پس از آن نظریه‌ی میدان الکترومغناطیس کلاسیک را با رهیافت مختصات کانونی بیان می‌کنیم و قوانین مکانیک آماری را به این مساله اعمال می‌کنیم تا نتیجه به دست آید. برای این که بشود بهتر مقاله را دنبال کرد، گام‌هایی که برداشته‌ایم را به صورت جعبه-جعبه درآورده‌ایم به شکلی که بتوانید مقاله را تا انتها بخوانید بدون این که لازم باشد محاسبه‌ها را به دقت دنبال کرده باشید. اگر صورت مساله‌ی ارائه شده در هر جعبه و نتیجه‌ی نهایی که در انتهای هر کدام آورده‌ایم را بدانید می‌توانید مقاله را به انتها برسانید. اما از نظر ما، محتوای جعبه‌ها جذاب و آموزنده است و شما را دعوت می‌کنیم که آن‌ها را دنبال کنید.

۲- رهیافت گاز فوتونی

بیایید ابتدا روش معمول برای نشان دادن رابطه‌ی بین آهنگ تابش انرژی و چگالی انرژی را مرور کنیم. این روش در بیشتر کتاب‌های فیزیک آماری آمده است. مثلا می‌توانید به کتاب بلاندل و بلاندل مراجعه کنید [1]. کاواکی را مانند شکل ۱ در نظر بگیرید. می‌خواهیم ببینیم شدت نور تابشی‌ای که از سوراخ کوچکی که در دیواره ایجاد شده می‌گذرد چه‌قدر است. نور را متشکل از ذرات فوتون در نظر می‌گیریم که بسامدهای مختلف ω می‌توانند داشته باشند. از آنجا که فوتون‌ها کاری به هم ندارند، بسامدهای مختلف را جدا جدا بررسی می‌کنیم، به عبارتی فقط به یک بسامد مشخص توجه می‌کنیم.

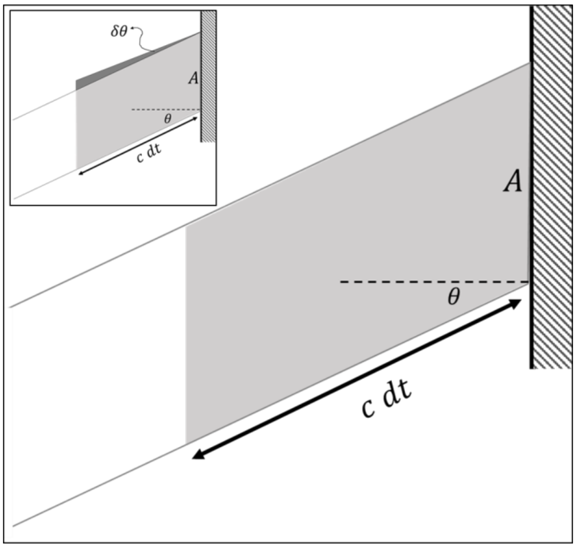


شکل ۱- محفظه‌ای پر از فوتون‌های گرمایی در دمای مشخص T که سوراخی کوچک در قسمتی از آن قرار دارد.

برای آنکه آهنگ تابشی را حساب کنیم، ابتدا تعداد فوتون‌هایی را که در واحد زمان از سطح کوچک مورد نظر می‌گذرند، به دست می‌آوریم. از آنجایی که حرکت فوتون‌ها همسانگرد است، تعداد فوتون‌هایی که سرعت‌شان در زاویه‌ی فضایی $d\Omega$ قرار دارد مستقل از جای زاویه‌ی فضایی است. یعنی اگر $f(\theta,\phi)d\Omega$ را احتمال این که فوتونی در جهت مشخص شده حرکت می‌کنند بنامیم، داریم $f(\theta,\phi)=1/4\pi$. بیایید تعداد فوتون‌هایی که در زاویه‌ی فضایی مشخص به مساحت کوچک A روی دیواره در زمان کوتاه dt برخورد می‌کنند را حساب کنیم. شکل ۲ می‌تواند کمک کند که این مقدار را بیابیم. به شکل اصلی نگاه کنید. تمام فوتون‌هایی که در متوازی‌السطوحی که با رنگ خاکستری نشان داده شده‌اند و سرعتی در راستای مشخص شده دارند، در این زمان به سطح مورد نظر برخورد می‌کنند. شاید اعتراض کنید که در این شکل فقط یک زاویه‌ی مشخص را گرفته‌اید ولی پیشتر در مورد بازه‌ای از زاویه‌ی فضایی صحبت کرده بودید! درست است، ولی اگر مثلا زاویه را بین θ تا $\theta+d\theta$ بگیریم، تنها تفاوتی که می‌کند این است که متوازی‌السطوحی که می‌گیریم باید اندکی زاویه‌هایش با هم تفاوت کند، یعنی شکل کوچک‌تر درون شکل ۲، که از نظر حجم تفاوتش با شکل اصلی دیفرانسیل مرتبه‌ی بالاتری می‌شود. بنابراین تاثیری در کار ما ندارد. به این‌ترتیب تعداد فوتون‌هایی برخورد کننده برابر است با حجم این متوازی‌السطوح ضرب‌در چگالی فوتون‌ها ضرب‌در احتمال این که چنین سرعتی داشته باشند، یعنی

$$N(\omega,\theta,\phi)=(cdt\ A\cos\theta)\times n_\omega\times d\Omega/4\pi \tag{5}$$

که n_ω چگالی فوتون‌هایی است که بسامد مشخص ω را دارند.



شکل ۲-بخشی از گاز فوتونی با سرعت مشخص که در زمان dt به مساحت A روی دیواره برخورد می‌کنند. شکل کوچک داخلی نشان می‌دهد که اگر زاویه‌ی بردار سرعت با عمود دیواره را بین θ و $\theta + d\theta$ بگیریم، تغییر قابل توجهی در محاسبه‌ها ندارد.

دو قدم دیگر مانده تا نتیجه‌ی مورد نظرمان را به دست بیاوریم. یکی این که باید روی انواع زاویه‌هایی که فوتون‌ها به سطح می‌خورند جمع بزنیم و دوم این که همه‌ی بسامدها را همراه با انرژی‌شان در نظر بگیریم. برای برداشتن قدم اول می‌نویسیم

$$N(\omega) = \int (cdt\, A\cos\theta) \times n_\omega \times d\Omega/4\pi = \frac{cAdtn_\omega}{4}. \tag{6}$$

فقط دقت باید کرد که انتگرال را روی نیمی از فضا می‌گیریم، یعنی طرفی که گاز فوتونی وجود دارد و به دیواره می‌خورد. به این ترتیب شاربرخورد فوتون‌های با بسامد ω، یعنی تعداد برخوردها در واحد زمان در واحد مساحت، به راحتی به دست می‌آید:

$$\frac{cn_\omega}{4}.$$

خب، تنها چیزی که مانده این است که ببینیم هر فوتون چه مقدار انرژی دارد و بعد جمع بزنیم روی همه‌ی بسامدهای فوتونی. انرژی هر فوتون که برابر است با $\hbar\omega$، پس انرژی عبوری در واحد زمان در واحد مساحت برابر است با

$$I = \int d\omega\hbar\omega \times \frac{cn_\omega}{4}. \tag{7}$$

اما چگالی انرژی هم عبارتی بسیار شبیه به این دارد. باید تعداد فوتون‌های در واحد حجم که بسامد ω دارند را در مقدار انرژی‌شان ضرب کنیم و روی همه‌ی بسامدها جمع بزنیم چگالی انرژی به دست می‌آید.

$$u = \int d\omega\hbar\omega \times n_\omega. \tag{8}$$

با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی بالا، واضح است که $I = \frac{c}{4}u$ و این همان حکمی بود که به دنبالش بودیم.

اما همان‌طور که گفتیم، این روش استدلال مبتنی بر وجود فوتون است، در صورتی که این نتیجه پیش از معرفی بسته‌های کوانتمی نور، یعنی فوتون یافته شده بود. در بخش‌های بعد مقاله روش‌هایی ارائه می‌دهیم که استدلال مشابهی برای این رابطه ارائه کنیم که تنها بر اساس الکترومغناطیس کلاسیک باشد. در مورد فشار هم استدلال‌های سرراست مشابهی وجود دارد که به نتیجه‌ی

$$P = \frac{u}{3} \tag{9}$$

می‌رسد. چنین استدلال‌هایی را می‌توانید در بیشتر کتاب‌های فیزیک آماری پیدا کنید.

۳- بررسی مساله صرفا بر اساس موج الکترومغناطیس کلاسیکی، روش شهودی

اگر بخواهیم مساله را کاملا کلاسیکی بررسی کنیم، دیگر خبری از ذراتی به نام فوتون نیست و تنها چیزی که در اختیار داریم معادله‌های ماکسول است که قوانین حاکم بر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را می‌دهد. به عبارتی، کمیت‌های دینامیکی مساله $\vec{E}(\vec{x},t)$ و $\vec{B}(\vec{x},t)$، یعنی میدان‌های الکترومغناطیسی هستند. البته به خاطر معادله‌های ماکسول، اگر میدان الکتریکی را داشته باشیم، می‌توانیم میدان مغناطیسی را هم پیدا کنیم و نیازی به دانستن آن نیست. خوشبختانه معادله‌های ماکسول خطی هستند و با رفتن به فضای فوریه ، تمام مدهای مختلف از هم جدا می‌شوند و می‌توان آن‌ها را تک‌تک بررسی کرد. به این ترتیب توصیف دینامیک دستگاه با میدان‌های برداری $\vec{E}(\vec{k})$ داده می‌شود که $\vec{k}$ بردار عدد موج است. اگر بخواهیم دقیق بنویسیم، میدان الکتریکی به صورت زیر از روی مدهای فوریه به دست می‌آید

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\vec{E}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}e^{-i\omega(\vec{k})t} + c.c.\right). \tag{10}$$

دقت کنید که میدان الکتریکی کمیتی حقیقی است ولی $\vec{E}(\vec{k})$ کمیتی مختلط است. پس بدون کم شدن از کلیت مساله می‌توانیم فرض کنیم

$$\vec{E}(\vec{k})^* = \vec{E}(-\vec{k}).$$

همچنین ما در نمادگذاری این اشتباه مرسوم را انجام داده‌ایم که مدهای فوریه را با همان نماد میدان الکتریکی، $\vec{E}$، نشان می‌دهند. از معادله‌ی ماکسول آشکار می‌شود که $\omega(\vec{k}) = c\,\|\vec{k}\|$ که $\|\vec{k}\| := \sqrt{\vec{k}\cdot\vec{k}}$. اگر از معادله‌های ماکسول استفاده کنیم، میدان مغناطیسی را هم می‌توانیم به دست بیاوریم که به صورت زیر به مولفه‌های فوریه‌ی میدان الکتریکی مربوط می‌شود:

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{\vec{k}}{\omega(\vec{k})} \times \vec{E}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}e^{-i\omega(\vec{k})t} - c.c.\right). \tag{11}$$

سوالی که به صورت خاص می‌خواهیم بپرسیم این است که رابطه‌ی بین چگالی انرژی و شار تابشی در چنین محفظه‌ای پر از میدان‌های الکترومغناطیسی چیست. پس می‌توانیم با محاسبه‌ی چگالی انرژی شروع کنیم که به راحتی از روی میدان‌ها به دست می‌آید:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 \|\vec{E}(\vec{x},t)\|^2 + \frac{1}{2\mu_0}\|\vec{B}(\vec{x},t)\|^2 \tag{12}$$

و انرژی کل، از انتگرال حجمی این چگالی حساب می‌شود:

$$U(t) = \int d^3x \ u(\vec{x},t). \tag{13}$$

در این بخش قرار است کمی شهودی‌تر و فیزیکی‌تر به مساله نگاه کنیم. با چنین نگاهی، وقتی در بافتار ترمودینامیک چگالی انرژی را بررسی می‌کنیم منظورمان دقیقا عبارت بالا نیست، بلکه میانگین‌گیری شده‌ی این کمیت در دوره‌ی زمانی معقول و حجمی قابل قبول است. برای این که این مساله را روشن کنیم، از مثال مکانیک شاره‌ها استفاده می‌کنیم. اگر میدان سرعت را در حرکت یک شاره با $v(x,t)$ نمایش بدهیم، منظورمان این نیست که مولکولی که در زمان t در نقطه‌ی x قرار دارد چه سرعتی دارد، تازه اگر مولکولی اصولا در این زمان آنجا باشد! معمولا منظور این است که محدوده‌ای فضایی را در نظر می‌گیریم که از ابعاد ریزمقیاس، که ابعاد مولکول‌هاست، بسیار بزرگ‌تر باشد و از ابعاد کل دستگاه کاملا کوچک‌تر باشد در این محدوده روی سرعت مولکول‌ها میانگین می‌گیریم و آن را به عنوان سرعت آن نقطه معرفی می‌کنیم. پس وقتی از $v(x,t)$ حرف می‌زنیم، منظور سرعت متوسط مولکول‌ها در آن حول و حواشی است. به این ترتیب افت‌وخیز ریزمقیاس مولکولی را حذف می‌کنیم. مثلا در مورد حرکت آب در یک رودخانه می‌شود محدوده‌ای از مرتبه‌ی میکرون گرفت و سرعت مولکول‌ها را در این بازه‌ی فضایی میانگین گرفت. حتی در معمولا این کار را در یک بازه‌ی زمانی‌ای انجام می‌دهیم که از مقیاس زمانی‌های دینامیک دستگاه کاملا کوچک‌تر است، اما در مقایسه با مقیاس زمانی‌های کوچک، کاملا بزرگ‌تر.

برگردیم به مساله‌ی الکترومغناطیس. با این توصیف‌هایی که کرده‌ایم، باید کمیت ترمودینامیکی چگالی انرژی را به این صورت تعریف کنیم:

$$\underline{u}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3x}{V_1} u(\vec{x},t), \tag{14}$$

که V_1 حجم کوچکی است که حول نقطه‌ی $\vec{x}$ گرفته‌ایم. همان‌طور که پیشتر گفتیم، این حجم باید از افت‌وخیزهای ریزمقیاس کاملا بزرگ‌تر باشد. در مورد مساله‌ی الکترومغناطیس قاعدتا این طول کوچک باید طول موج مربوط به امواج الکترومغناطیسی باشد. اما در یک کاواک انواع طول موج‌ها وجود دارد پس چگونه می‌شود طول موج مشخصه درآورد؟ پاسخ به این پرسش از توزیع طیف پلانک می‌آید که در آن، طول موجی وجود دارد که تابع توزیع در آنجا قله‌ای پیدا می‌کند و بیشتر انرژی مربوط به امواجی است که اندازه‌ی طول موج‌شان در آن حدود است. مثلا برای نور خورشید این مقیاس حدود صد نانومتر است. یعنی ما باید مقیاسی که V_1 را ساخته‌ایم را دست کم یک میکرون بگیریم. البته راه فیزیکی دیگری هم هست. می‌توان در محدوده‌ی کوچک‌تری نشست اما میانگین‌گیری زمانی را هم افزود. پس با این اوصاف، احتمالا می‌توان کمیت چگالی انرژی را کمی ساده‌تر کرد. بگذارید فعلا قسمتی از انرژی که مربوط به میدان الکتریکی است را در نظر بگیریم. قسمت مربوط به میدان مغناطیسی را می‌توان با عملیاتی مشابه بررسی کرد. به این ترتیب:

$$
\begin{aligned}
\underline{u}_E(\vec{x},t) &= \int \frac{d^3x}{V_1}\frac{1}{2}\epsilon_0\left\|\vec{E}(\vec{x},t)\right\|^2 \\
&= \frac{\epsilon_0}{2}\int\frac{d^3x}{V_1}\int\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\left(\vec{E}(\vec{k}_1)e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{x}}e^{-i\omega(\vec{k}_1)t}+\mathrm{c.c.}\right) \\
&\cdot\left(\vec{E}(\vec{k}_2)e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{x}}e^{-i\omega(\vec{k}_2)t}+\mathrm{c.c.}\right).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

حالا با توجه به این که ابعاد حجم V_1 از طول موج‌های مهم دستگاه کاملا بزرگ‌تر است، نتیجه‌ی انتگرال‌ها روی مکان، تقریبا تابع‌های دلتای دیراک روی عدد موج‌های $\vec{k}_1$ و $\vec{k}_2$ را می‌دهد. البته باید این ادعا که «تقریبا» تابع دلتای دیراک می‌دهد را معنی کنیم. فعلا ادعایمان این است که

$$
\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2).\vec{x}} \simeq \delta^3(\vec{k}_1-\vec{k}_2). \tag{16}
$$

اگر این را بپذیریم، عبارت چگالی انرژی به صورت زیر در می‌آید.

$$
\underline{u}_E(\vec{x},t) = \frac{2\epsilon_0}{V_1}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\vec{E}(k)\cdot\vec{E}(k)^*. \tag{17}
$$

پس باید انرژی هر مد نوسانی را مجزا در نظر گرفت و میزان انرژی نهفته شده در هر مد متناسب با $\vec{E}(k)\cdot\vec{E}(k)^*$ است. اگر با شیوه‌ای مشابه، انرژی مربوط به میدان مغناطیسی را حساب کنیم می‌بینیم که دقیقا همین کمیت به دست می‌آید و در نتیجه انرژی الکترومغناطیس کل دو برابر عبارت بالاست، یعنی

$$
\underline{u}(\vec{x},t) = \frac{4\epsilon_0}{V_1}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\vec{E}(k)\cdot\vec{E}(k)^*. \tag{18}
$$

پیش از این که جلو برویم بگذارید این نکته که این انتگرال تقریبا تابع دلتای دیراک است را باز کنیم. برای ساده‌تر شدن مساله را یک بعدی در نظر می‌گیریم. عبارتی که ما آن را به عنوان تابع دلتای دیراک جا زده‌ایم عبارت است از:

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}dx\, e^{i(k_1-k_2)x}. \tag{19}
$$

تابع دلتای دیراک نمایش‌های مختلف دارد. مثلا یکی از نمایش‌های آن می‌تواند این باشد که تابعی را در نظر بگیرید که در بازه‌ی $[-\epsilon,\epsilon]$ مقداری برابر با $1/\epsilon$ دارد و بقیه‌ی جاها صفر است. اگر حد ϵ به سمت صفر این تابع را حساب کنیم، به تابع دلتای دیراک می‌رسیم. اصولا چون تابع دلتای دیراک، واقعا تابع نیست، معمولا همین روند را پی می‌گیریم. یعنی تابعی تعریف می‌کنیم به صورت $f_\epsilon(u)$ و درخواست می‌کنیم که انتگرال روی آن از منفی بینهایت تا مثبت بینهایت برابر با واحد باشد و در حد $\epsilon\to 0$ به ازای هر $g(x)$ پیوسته داشته باشیم:

$$
g(0) = \int_{-\infty}^{\infty}du\, g(u)f_\epsilon(u). \tag{20}
$$

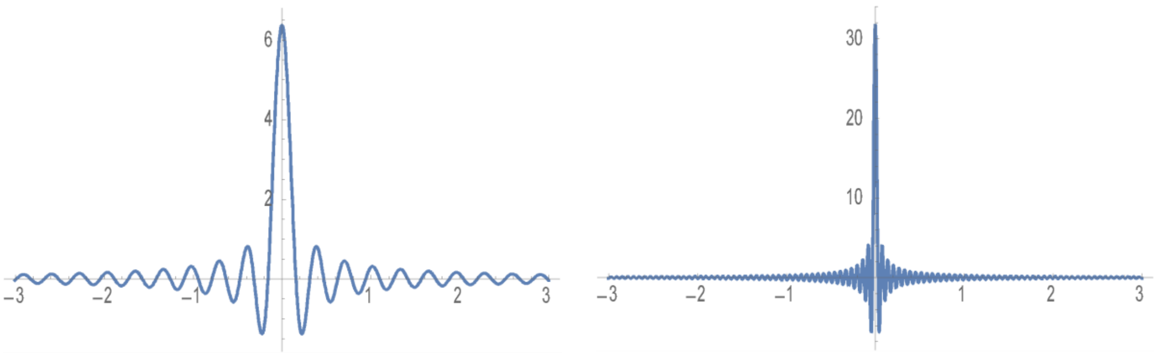
تابعی که بالاتر از آن صحبت کردیم یکی از این دسته توابع است. اما تاریخی هم که نگاه کنیم، اولین تابع از این دست، تابعی است که از بسط فوریه به دست می‌آید[2]. ژوزف فوریه، برای معرفی و کار با تبدیل فوریه چیزی شبیه به این نوشت:

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dv\ \ g(v)\int_{-\infty}^{\infty} dx \cos[x(u-v)] \tag{21}$$

که تقریبا شکل حقیقی تابعی است که ما در بالا آورده‌ایم. یکی از نمایش‌های تابع دلتای دیراک بر همین اساس ساخته شده است. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\eta_\epsilon(k) = \int_{-1/\epsilon}^{1/\epsilon} dx \cos(kx) = \frac{1}{\pi k}\sin\left(\frac{k}{\epsilon}\right). \tag{22}$$

این تابع تمام شرایطی که برای تعریف تابع دلتای دیراک خواسته بودیم را دارد و در نتیجه در حد $\epsilon \to 0$ به تابع دلتای دیراک تبدیل می‌شود. این نمایش تابع دلتای دیراک، از رشته نمایش‌های نوسانی تعریف تابع دلتای دیراک است. به این معنی که در این رشته این طور نیست که با کوچک کردن ϵ، تابع همه جا (به جز حول و حوش مبدا) صفر شود. بلکه در این حد بالا و پایین رفتنش در تمام نقاط به جز مبدا، آن‌قدر تند می‌شود که وقتی انتگرال روی آن بگیریم، اثر این نقاط حذف می‌شود و فقط اثر مبدا باقی می‌ماند. شکل پایین نمونه‌هایی از این تابع به ازای $\epsilon = 0.01$ و $\epsilon = 0.05$ را نشان می‌دهد. توجه کنید که مقیاس محورهای عمودی متفاوت است.



$\epsilon = 0.05$ $\qquad\qquad$ $\epsilon = 0.01$

شکل ۳- نمایشی از تابع دلتای دیراک که با رابطه‌ی (22) داده می‌شود به ازای دو مقدار 0.05 و 0.01 برای کمیت ϵ. دقت کنید که مقیاس محورهای عمودی در دو شکل یکسان نیست.

در رابطه‌ای که برای چگالی انرژی به دست آوردیم، با چنین تعریفی از تابع دلتای دیراک مواجه شدیم که البته حدود انتگرالش بینهایت نبود، ولی به نسبت طول موج‌های اصلی دستگاه بسیار بزرگ‌تر بود. به این ترتیب اگر به حد ترمودینامیک برویم، یعنی میانگین کلی چگالی انرژی دستگاه را در نظر بگیریم، این تقریب دقیق می‌شود، اما در مقیاس‌هایی که اندازه‌گیری‌های معمول انجام می‌شود هم این تقریب بسیار خوب کار می‌کند.

این را هم اضافه کنیم که اندازه‌گیری‌ها معمولا در یک بازه‌ی زمانی نه چندان کوتاه انجام می‌شود که در نتیجه یک میانگین‌گیری زمانی هم باید انجام دهیم که اثر مشابهی دارد و تقریب ما را موجه‌تر می‌کند. برای نشان دادن این مساله باز هم شکل ساده‌تر شده‌ای را در نظر می‌گیریم. بیایید میانگین زمانی چگالی انرژی دو موج تک‌بسامد را در یک بعد حساب کنیم. میدان الکتریکی از رابطه‌ی

$$E = E_1 e^{i(k_1 x-\omega_1 t)} + E_2 e^{i(k_2 x-\omega_2 t)} \tag{23}$$

به‌دست می‌آید. وقتی چگالی انرژی را حساب می‌کنیم، باید اندازه‌ی مربع میدان الکتریکی را به دست‌آوریم. مربع میدان دو جور جمله دارد، جمله‌های که از مربع کردن هر کدام از موج‌های تک‌بسامد است و جمله‌هایی که حاصل‌ضرب میدان یک موج در میدان موج دوم است. چیزی که می‌خواهیم نشان دهیم این است که متوسط جمله‌ی حاصل‌ضرب دو موج در هم کوچک است. بگذارید این جمله را u_{12} بنامم. به این ترتیب:

$$\langle u_{12}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, u_{12}(t) = \frac{1}{T} E_1 E_2^* e^{i(k_1-k_2)x}\int_0^T dt\, e^{i(\omega_1-\omega_2)t}. \tag{24}$$

در این رابطه، T مدت زمانی است که در طی آن دستگاه اندازه‌گیر میدان را بررسی می‌کند و می‌تواند از مرتبه‌ی ثانیه باشد. بسامدهای $\omega_{1,2}$ هم بسامدهای نوعی دستگاه هستند که برای نور با دمای خورشید، حدود $10^{15}\mathrm{rad/s}$ است. گرفتن انتگرال بالا کاملا سرراست است. البته باز باید دقت بکنیم که عملا منظورمان جز حقیقی این انتگرال است، چون چگالی انرژی کمیتی حقیقی است. قسمت بیرون انتگرال چندان مهم نیست و به میانگین‌گیری زمانی کاری ندارد، پس فقط جز حقیقی انتگرال را بررسی می‌کنیم.

$$Re\left(\int_0^T dt\, e^{i(\omega_1-\omega_2)t}\right) = \frac{1}{T(\omega_1-\omega_2)}\sin[(\omega_2-\omega_1)t]. \tag{25}$$

جمله‌ی سینوس که عددی بین منفی یک تا یک می‌دهد. اما ضریب جلوی آن می‌تواند بسیار کوچک باشد. اگر مثلا نور زرد و سبز را به عنوان دو بسامد مورد نظرمان فرض کنیم، تفاضل بسامدها همچنان در حد همان $10^{15}\mathrm{rad/s}$ است و در نتیجه، از آنجا که زمان اندازه‌گیری را حدود ثانیه گرفته‌ایم، کمیت حاصل چیزی از مرتبه‌ی 10^{-15} می‌شود که بسیار کوچک است. تنها وقتی این انتگرال مقداری از مرتبه‌ی واحد می‌دهد که تفاضل این دو بسامد هم از مرتبه‌ی 2π تقسیم بر یک ثانیه شود. در مقیاس موج نوری، تشخیص چنین دو بسامدی از هم، معنی‌اش این است که دستگاهی دارید که با پانزده رقم معنی‌دار، می‌تواند بسامد را اندازه بگیرد!

کل داستان را به شکل شهودی این طور می‌توان گفت که اگر در زمان یا مکان میانگین‌گیری کنیم، مدهایی که همراه با هم بالا و پایین نروند، گاهی هم‌افزایی سازنده می‌کنند و گاهی هم‌افزایی مخرب و در نهایت اثر جمعی این دو، نقشی در انرژی متوسط ندارد و فقط باید انرژی مدهای مختلف را جداگانه حساب کرد و در نهایت با هم جمع زد. در مورد قسمتی از انرژی الکترومغناطیسی که از میدان مغناطیسی می‌آید، با استدلال مشابهی می‌توان همین نتیجه را گرفت. به زبان ریاضی بخواهیم بنویسیم، به این شکل در می‌آید که میانگین زمانی (و مکانی) میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی امواج به این صورت هستند:

$$\langle \vec{E}(\vec{k},t)\cdot\vec{E}(\vec{k}',t)\rangle_{t,V} = C_E\,\delta(\vec{k}-\vec{k}'), \tag{26}$$

$$\langle \vec{B}(\vec{k},t)\cdot\vec{B}(\vec{k}',t)\rangle_{t,V} = C_B\,\delta(\vec{k}-\vec{k}') \tag{27}$$

که C_E و C_B دو ثابت هستند. این میانگین‌گیری‌ها بعد از حل مساله انجام شده، یعنی حل معادلات ماکسول را در دست داشته‌ایم و با استفاده از این حل‌ها میانگین را حساب کرده‌ایم. برای این روی این موضوع تاکید می‌کنیم که در بخش بعدی، قرار است بدون در دست داشتن حل معادله‌ها چیزهایی شبیه این همبستگی‌ها را حساب کنیم.

قسمت بعدی کار، یافتن آهنگ شارش انرژی تابشی بر واحد سطح است. این کمیت با بردار پوینتینگ داده می‌شود، یعنی $\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$. اما صرفا داشتن این کمیت مشکل ما را حل نمی‌کند. چرا؟ یک نقطه‌ی دلخواه در محفظه‌ی پر از امواج الکترومغناطیسی در تعادل ترمودینامیکی را در نظر بگیرید. فرض کنید می‌خواهیم عبور انرژی از سطحی دلخواه که از این نقطه می‌گذرد را حساب کنیم. این کمیت می‌شود $\vec{S}(\vec{x}).\hat{n}$ که $\hat{n}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح است و سمت‌گیری آن در جهتی است که می‌خواهیم عبور انرژی را حساب کنیم. از آنجا که قاعدتا به صورت خالص، هیچ انرژی‌ای از سویی به سوی دیگر نمی‌رود باید میانگین این کمیت صفر باشد، یعنی کلا بردار پوینتینگ میانگینی برابر با صفر دارد. درستش را بخواهید این است که بله کل شار انرژی صفر است، ولی هر لحظه مقداری انرژی از چپ به راست سطح می‌رود و مقداری هم از راست به چپ. چیزی که نیاز داریم تا آهنگ تابش از دیواره‌ی محفظه‌ی پر از میدان الکترومغناطیسی را بیابیم فقط یکی از این دو مقدار انرژی است، چرا که در یک سمت دیواره، امواج الکترومغناطیسی وجود دارند و در سوی دیگر، یعنی بیرون کاواک، نیستند. بنابراین باید مولفه‌های مختلف موج‌ها را باز کنیم و فقط شارش آنهایی را در نظر بگیریم که $\vec{k}.\hat{n}$ مثبت است. شاید بپرسید چرا $\vec{k}.\hat{n}$ و نه $\vec{S}.\hat{n}$. کاملا سوال به‌جایی است. اما همان‌طور که دیده‌اید و ما هم اندکی بعد نشان می‌دهیم، برای هر مد موج الکترومغناطیسی بردار عدد موج و بردار پوینتینگ هم‌جهتند.

بگذارید نکته‌ای که گفتیم را در گوشه‌ای از ذهن نگه‌داریم و برگردیم به حساب کردن بردار پوینتینگ، فقط باید یادمان باشد که خوب است بردار پوینتینگ مربوط به مدهای مختلف چیز به‌دردبخوری است، پس با کمک معادله‌ی (۱۱) می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\vec{S}(\vec{x},t)=\frac{1}{\mu_0}\int\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}&\left(\vec{E}(\vec{k}_1)e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{x}}e^{-i\omega(\vec{k}_1)t}+\mathrm{c.c.}\right)\\&\times\left(\frac{\vec{k}_2}{\omega(\vec{k}_2)}\times\vec{E}(\vec{k}_2)e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{x}}e^{-i\omega(\vec{k}_2)t}-c.c.\right).\end{aligned}\tag{28}$$

مانند چگالی انرژی، چیزی که لازم داریم میانگین بردار پوینتینگ روی حجمی کوچک و در زمانی معقول است و نه خود این بردار در زمان و مکانی دقیق و مشخص. حالا روی حجمی کوچک نسبت به ابعاد درشت‌مقیاس میانگین می‌گیریم. محاسبه‌ها بسیار شبیه به آن است که در مورد چگالی انرژی داشتیم. پس شاید اگر خلاصه‌وار هم بنویسیم با تجربه‌ای که از بخش قبل به دست آمده است احتمالا بتوانید به راحتی آن را دنبال کنید

$$\underline{\vec{S}}(\vec{x},t)=\frac{2}{\mu_0V_1}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\vec{E}(\vec{k})\times\left(\frac{\vec{k}}{\omega(k)}\times\vec{E}(\vec{k})^*\right)+c.c.\right].\tag{29}$$

امواج الکترومغناطیسی در خلا عرضی‌اند، یعنی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر راستای انتشار، یعنی همان راستای $\vec{k}$ عمودند. پس محاسبه‌ی ضرب‌های خارجی عبارت بالا بسیار ساده است. علاوه بر این می‌دانیم $\omega=ck$ و درنتیجه

$$\underline{\vec{S}}(\vec{x},t)=\frac{4}{\mu_0cV_1}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\vec{E}(k)\cdot\vec{E}(k)^*\right)\hat{k}.\tag{30}$$

نتیجه‌ی جذابی است. بگذارید با دقت نگاهش کنیم. اول این‌که بردار پوینتینگ را بر حسب مدها باز کرده‌ایم. دوم، به ازای هر مد، بردار پوینتینگ همسو با بردار موج است. سوم، عبارتی که به عنوان اندازه‌ی شارش انرژی در مد $\vec{k}$ به دست آمده بسیار شبیه به چگالی انرژی است. اگر بنویسیم $\underline{\vec{S}}(\vec{x},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\underline{\vec{S}}(\vec{k})$ و $\underline{u}(\vec{x},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\underline{u}(\vec{k})$، در این صورت داریم:

$$\underline{\vec{S}}(\vec{k}) = c\underline{u}(\vec{k})\hat{k}. \tag{31}$$

دیگر راهی نمانده تا رابطه‌ای که از اول دنبالش بودیم را ثابت کنیم، باید یک سطح فرضی بگیریم، مثلا سطحی عمود به محور z و بعد به ازای تمام $\vec{k}$هایی که مولفه‌ی zشان مثبت است، $\vec{S}.\hat{z}$ را حساب کنیم و با هم جمع بزنیم تا توان تابشی به دست آید

$$I = \vec{S}.\hat{n} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} cu(k)\cos\theta. \tag{32}$$

باید این انتگرال را روی نیمی از فضای تکانه زد، یعنی θ از صفر تا $\pi/2$ می‌تواند تغییر کند. پس:

$$I = c\int \frac{k^2dk}{(2\pi)^3}u(k)\int d\phi \int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\, d\theta = c\pi\int \frac{k^2dk}{(2\pi)^3}u(k) \tag{33}$$

که اگر با چگال انرژی $u = 4\pi\int \frac{k^2dk}{(2\pi)^3}u(k)$ مقایسه کنیم می‌بینیم که

$$I = \frac{c}{4}u \tag{34}$$

یعنی همان نتیجه‌ای که دنبالش بودیم.

نکته‌ای که می‌ماند این است که رابطه‌ی بین فشار و چگالی انرژی را هم به دست آوریم. برای این کار باید رد شارش تکانه را بگیریم. در محاسبه‌های بالا ما رد شارش انرژی را گرفتیم. دقیق‌ترش را بخواهید، باید بگوییم که بردار پوینتینگ شارش انرژی را می‌داد و در نتیجه با استفاده از آن توانستیم آهنگ تابش انرژی را دربیاوریم. اگر بخواهیم شارش تکانه را بررسی کنیم، باید سراغ کمیتی برویم که رد شارش تکانه را می‌دهد. این کمیت در الکترومغناطیس کلاسیک شناخته شده است: تانسور تنش که معمولا با T_{ij} نشان می‌دهند. اگر بخواهیم رد مولفه‌ی iام تکانه را دنبال کنیم، باید از بردار $\vec{K_i} = (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$ استفاده کنیم. یعنی درست مانند حالت انرژی که داشتیم $\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot S = 0$ اینجا داریم $\frac{\partial p_i}{\partial t} - \nabla\cdot K_i = 0$ که p_i چگالی تکانه در راستای iام است. شکل تانسور تنش را می‌توانید در بیشتر کتاب‌های الکترومغناطیس بیابید[3]:

$$T_{ij} = \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\|E\|^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\|B\|^2\right). \tag{35}$$

تانسور تنش مفهومی بسیار شهودی و فیزیکی دارد. سطحی فرضی که بر راستای iام عمود است را در نظر بگیرید. مولفه‌ی jام نیرویی که از طرف میدان‌های الکترومغناطیسی در واحد سطح بین دو سوی این سطح رد و بدل می‌شود T_{ij} است. با این حساب به دست می‌آید که فشار برابر است با منفی مولفه‌های قطری این ماتریس، بنابراین:

$$P = -\frac{1}{2}\epsilon_0\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2\right) - \frac{1}{2\mu_0}\left(B_x^2 - B_y^2 - B_z^2\right). \tag{36}$$

با توجه به این که مسیر رسیدن به رابطه‌ی بین فشار و چگالی انرژی بسیار شبیه چیزی است که پیشتر نشان داده‌ایم، پیمودن این مسیر را به عهده‌ی شما می‌گذاریم. علاوه بر این می‌توانید نشان دهید که برای میدان‌های الکترومغناطیسی در حال تعادل نیروهای برشی صفر هستند.

۴- رهیافت مجردتر بر اساس موج‌های الکترومغناطیسی کلاسیک

در بخش قبل سعی کردیم با مراجعه به شهود و آن چیزی که در واقع اندازه‌گیری می‌شود، مساله را جلو ببریم. اما مکانیک آماری سازوکاری درست کرده‌است که این روش‌های شهودی را با روش‌های دقیق‌تر ریاضی قوام دهیم. بنابراین در این بخش، احتمالا روابط ریاضی بیشتری می‌بینید. جذابیت این مساله در این است که دستگاهی را در نظر گرفته‌ایم که عملا یک نظریه‌ی میدان است و می‌خواهیم برای این نظریه‌ی میدان تابع پارش بنویسیم و از این طریق روابط ترمودینامیکی را به دست آوریم. تازه، همان‌طور که خواهیم دید، پیچ و خم‌هایی در این نظریه‌ی میدان وجود دارد که اگر بعدها بخواهید الکترودینامیک کوانتمی را یاد بگیرید، به این پیچ و خم‌ها برخورد می‌کنید. برای همین فکر می‌کنیم ارزشش را دارد که این پیچیدگی‌ها را در جایی که احساس نزدیکی بیشتری به فیزیک ماجرا داریم ببینیم.

بگذارید پیش از این که به مثال خاص الکترودینامیک برسیم، رویکرد فیزیک آماری را به صورت کلی دوره کنیم تا ببینیم چه قدم‌هایی را باید برداریم. در رهیافت مکانیک آماری به جای میانگین‌گیری‌های زمانی از میانگین‌گیری‌های هنگردی استفاده می‌کنیم، به عبارتی روی پیکربندی‌های مختلف دستگاهمان جمع می‌زنیم. به عبارتی قضیه‌ی اصلی مکانیک آماری می‌گوید که میانگین‌گیری زمانی، عملا با میانگین‌گیری هنگردی یکسان است. برای همین به جای این که تحول دستگاه را بررسی کنیم، با جمع زدن روی انواع پیکربندی‌های دستگاه نتیجه‌ی دلخواه‌مان را می‌گیریم. ابتدا باید پیکربندی‌های دستگاه را بشناسیم. فعلا که در چارچوب مکانیک کلاسیک کار می‌کنیم، پیکربندی‌های یک دستگاه، با مختصات مکانی و تکانه‌ای آن داده می‌شود و باید جای دستگاه را در فضای فاز مشخص کرد. مثلا دستگاهی را در نظر بگیرید که در آن ذره‌ای می‌تواند در یک بعد حرکت کند. پیکربندی این دستگاه با مشخص کردن زوج مرتب مکان و تکانه، یعنی (p,q) مشخص می‌شود. پس از آن باید همیلتونی دستگاه را بر حسب پیکربندی آن بدهیم. باز اگر همین ذره‌ای که در یک بعد حرکت می‌کند را در نظر بگیریم، همیلتونی آن معمولا با عبارتی شبیه $H = p^2/2m + V(q)$ داده می‌شود که $V(q)$ پتانسیلی است که جسم در آن قرار دارد. اگر مثلا جسم مورد نظر به فنر وصل باشد، پتانسیل آن $\frac{1}{2}m\omega^2q^2$ است. قدم بعدی در مکانیک آماری تشکیل هنگرد مناسب است، مثلا هنگرد قانونی. در این هنگرد احتمال رخداد هر حالت با $e^{-\beta H(q,p)}$ متناسب است که به آن وزن بولتزمن می‌گویند. در این مثال جرم و فنر، توزیع احتمال رخداد هر حالت با $e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2\right)}/Z$ داده می‌شود که Z تابع پارش این دستگاه است:

$$Z = \int dqdp\, e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2\right)}. \tag{37}$$

چیزهایی که ممکن است لازم شود حساب کنیم کمیت‌هایی مانند $\langle q^2\rangle$، $\langle p^2\rangle$ یا $\langle qp\rangle$ است، که با توجه به این که احتمال‌ها گوسی است، این میانگین‌ها بسیار ساده به دست می‌آیند. به نظرمان باز کردن این موضوع، بماند برای وقتی که به مساله‌ی الکترومغناطیسی‌مان رسیده‌ایم.

برگردیم به مساله‌ی الکترودینامیک از دیدگاه آماری. گام‌هایی که برای حل این مساله باید برداریم این‌هاست:

۱) همیلتونی مربوط به این دستگاه را بنویسیم.

۲) مختصه‌ها و تکانه‌های کانونی را به دقت تعریف کنیم.

۳) تابع وزن بولتزمن را به دست آوریم.

۴) در نهایت با میانگین‌گیری با وزن بولتزمن به دست آمده، کمیت‌هایی که می‌خواهیم را حساب کنیم.

متاسفانه یا خوشبختانه، الکترومغناطیس پیچیدگی‌ای دارد که کمی کار را سخت اما جذاب می‌کند. ماجرا این است به صورت بنیادی، متغیرهای دینامیکی دستگاه، پتانسیل‌های الکترومغناطیسی هستند و نه میدان‌ها. یعنی باید لاگرانژی و همیلتونی را برحسب این کمیت‌ها نوشت و از روی آن‌ها معادلات حرکت را نوشت. تازه، همین پتانسیل‌ها دردسر دیگری درست می‌کنند و آن هم این که آزادی پیمانه‌ای داریم و برای این که حالت‌های تکراری در جمع‌زدن‌هایمان نیاوریم، باید پیمانه را مشخص کنیم. به نظرمان رسید که اگر همه‌ی این کارها را با هم انجام دهیم، شاید دنبال کردن این نوشتار سخت شود. به همین دلیل این استدلال‌ها را به صورت جعبه-جعبه در آورده‌ایم که مشخص باشد هر قسمت از محاسبه‌ها به چه منظوری است و چه چیزی را می‌خواهد به دست آورد. می‌توانید هر کدام از جعبه‌ها را به دقت بخوانید، ولی بدون دانستن محتویات جعبه هم می‌توانید خط کلی استدلال‌ها را دنبال کنید.

جعبه‌ی یک: معادله‌های کانونیک ماکسول

در این جعبه، مساله‌ی الکترودینامیک در خلا را با روش همیلتونی نوشته‌ایم. چیزی که قرار است در نهایت در این جعبه بفهمیم این است که مختصه‌ها و تکانه‌های همیوغ در این مساله چیست و در نهایت همیلتونی چگونه بر حسب این کمیت‌ها نوشته می‌شود.

معمولا معادله‌های ماکسول به عنوان قوانین اصلی و بنیادی الکترومغناطیس ارائه می‌شوند. اما همین معادله‌های ماکسول را می‌توان از اصل کم‌ترین کنش به دست آورد. به عبارتی با توجه به این که در مدل‌های معمول تمام معادله‌های حرکت از وردش گرفتن از یک کنش به دست می‌آید، الکترومغناطیس هم از این داستان مستثنا نیست. برای این که الکترومغناطیس را از این روش ارائه کنیم باید کنشی بیابیم که با وردش گرفتن از آن نسبت به متغیرهای دینامیکی معادله‌های ماکسول نتیجه شود. بسیار هیجان انگیز است که تلاش کنید چنین کنشی را خودتان به دست آورید. تلاش‌هایی که فیزیک‌پیشه‌ها کرده‌اند به این نتیجه رسیده‌است که کنش ماکسول در خلا با رابطه‌ی $S = \int dt\, L$ و لاگرانژی هم با رابطه‌ی

$$L = \frac{1}{2}\int d^3 x \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right), \qquad (38)$$

داده می‌شود، اما میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی متغیرهای دینامیکی نیستند. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر حسب مولفه‌های چاربردار پتانسیل $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ بیان می‌شود که این‌ها کمیت‌های قانونی دستگاه هستند و باید وردش را نسبت به آن‌ها گرفت. برای یادآوری ذکر می‌کنیم که $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t \vec{A}$ و $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

در مکانیک آماری، باید همیلتونی را تعریف کرد و تابع پارش را برحسب آن نوشت. برای همین نیاز است که تکانه‌های همیوغ با متغیرهای دینامیکی را هم بیاوریم. تعریف تکانه‌های هم‌یوغ $\pi_\mu := \frac{\delta S}{\delta \partial_t A^\mu}$ به ما نشان می‌دهد که تکانه‌ی نظیر پتانسیل برداری $\vec{A}$ متناسب با میدان الکتریکی است؛ $\pi_i = -\epsilon_0 E_i$. اما به دست می‌آید که تکانه‌ی نظیر پتانسیل نرده‌ای ϕ صفر است؛ $\pi_0 = 0$، که خب، ممکن است عجیب به نظر برسد. ولی اگر جلوتر برویم همه چیز درست می‌شود.

نوبت به ساختن همیلتونی است. از آن‌جا که با یک نظریه‌ی میدان مواجهیم، یعنی متغیرهای دینامیکی تابعی از فضا هستند، طبیعی است که کمیتی مثل چگالی همیلتونی را تعریف کنیم و انتگرال‌گیری فضایی روی آن همیلتونی کل را بدهد:

$$\begin{aligned} H &:= \left(\int d^3x\, \pi_\mu \partial_t A^\mu\right) - L = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\pi}^2}{\epsilon_0} + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}\right) + \vec{\pi}\cdot\nabla\phi\right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\pi}^2}{\epsilon_0} + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}\right) - \phi\nabla\cdot\vec{\pi}\right] \end{aligned} \tag{39}$$

که در گام آخر از جمله‌ی مرزی در انتگرال‌گیری جزء به جزء چشم‌پوشی کرده‌ایم. چنین جمله‌ای سهمی در دینامیک میدان‌ها ندارد. پس از ساختن همیلتونی، خوب است بررسی کنیم آیا معادلات همیلتون، همان معادله‌های ماکسول را می‌دهد یا نه. معادله‌ی حرکت همیلتون برای π_0 بسیار ساده است:

$$0 = \partial_t \pi_0 = \frac{\delta H}{\delta \phi} = -\nabla\cdot\vec{\pi} = \epsilon_0 \nabla\cdot\vec{E}. \tag{40}$$

به این ترتیب می‌بینیم که در این فرمول‌بندی، قانون کولن (در خلا) بازتاب قیدی است که از آغاز بر فضای فاز نظریه زده شده است و آن صفر بودن تکانه‌ی هم‌یوغ پتانسیل نرده‌ای است. معادله‌ی حرکت همیلتون برای $\vec{A}$ عبارت است از

$$\partial_t \vec{A} = \frac{\delta H}{\delta \vec{\pi}} = \frac{\vec{\pi}}{\epsilon_0} + \nabla\phi, \tag{41}$$

که همان تعریف میدان الکتریکی بر حسب پتانسیل‌ها را بازآفرینی می‌کند. معادله‌ی آمپر (در خلا) از معادله‌ی حرکت همیلتون برای $\vec{\pi}$ به دست می‌آید:

$$\partial_t \vec{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta \vec{A}} = -\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}. \tag{42}$$

همیلتونی H به π_0 بستگی ندارد و اگر معادله‌ی همیلتون را برای پتانسیل نرده‌ای بنویسیم به این نتیجه می‌رسیم که $\partial_t\phi = 0$. اما چرا باید چنین قیدی بر پتانسیل اسکالر اعمال شود؟ ما می‌دانیم که تعریف میدان الکتریکی و مغناطیسی دربرگیرنده‌ی آزادی پیمانه‌ای است. یعنی اگر برای توصیف میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی نظیر چاربردار پتانسیل A^μ می‌توانیم چاربردار $A'^\mu := A^\mu + \partial^\mu\chi$ را به کار ببریم بی آن که بگوییم χ چه تابعی است. پس فرض $\partial_t\phi = 0$ مجاز هست اما ضروری نیست.

مثلا فرض کنید که به جای همیلتونی H که بالا به دست آوردیم، همیلتونی $H' := H + \int d^3x \pi_0 \xi$ را به کار ببریم که در آن ξ به عنوان ضریب نامعین لاگرانژ دانسته می‌شود؛ درجه‌ی آزادی تازه‌ای که معادله‌ی حرکت همیلتون نظیر آن، قید $\pi_0 = 0$ را به دست می‌دهد. همیلتونی H' هم‌چنان معادله‌ی حرکت آمپر را به دست می‌دهد ولی نشان می‌دهد که $\partial_t\phi = \xi$.

چون لاگرانژی بستگی صریحی به زمان ندارد انرژی نظیر هر پاسخی از معادله‌های حرکت با مقدار همیلتونی روی لاک حرکت داده می‌شود. (لاک حرکت یعنی تحولی در فضای فاز که در معادلات حرکت صدق می‌کنند) پس:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left(\epsilon_0 \left\|\vec{E}(\vec{x})\right\|^2 + \frac{1}{\mu_0}\left\|\vec{B}(\vec{x})\right\|^2\right). \tag{43}$$

اما در هر صورت درستش این است که همیلتونی را بر حسب مختصه‌ها و تکانه‌های همیوغ بنویسیم. مختصه‌ها که مولفه‌های بردار $\vec{A}$ به همراه پتانسیل نرده‌ای هستند و تکانه‌ها هم مولفه‌های بردار $-\vec{E}$. میدان الکتریکی صریحا در معادله‌ی بالا وجود دارد، اما باید میدان مغناطیسی را به شکل تاو پتانسیل برداری جایگزین کنیم. یعنی:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left(\epsilon_0 \left\|\overrightarrow{E}(\vec{x})\right\|^2 + \frac{1}{\mu_0}\left\|\nabla\times\overrightarrow{A}(\vec{x})\right\|^2\right). \qquad (44)$$

با این اوصاف، همیلتونی به پتانسیل نرده‌ای و تکانه‌ی خنده‌دارش وابسته نیست و فضای فاز را عملا می‌شود به پتانسیل برداری و تکانه‌های همیوغ آن محدود کرد.

نتیجه‌ی نهایی: مختصات کانونیک: $\vec{A}(x)$، تکانه‌های همیوغ: $\left(-\vec{E}(x)\right)$،

همیلتونی: $\frac{1}{2}\int d^3x \left(\epsilon_0 \left\|\overrightarrow{E}(\vec{x})\right\|^2 + \frac{1}{\mu_0}\left\|\nabla\times\overrightarrow{A}(\vec{x})\right\|^2\right)$.

نتیجه‌ای که در جعبه‌ی یک به دست آورده‌ایم می‌تواند راه را برای حساب کردن میانگین‌هایی که لازم داریم باز کند. خوشبختانه همیلتونی دستگاه نسبت به مختصات و تکانه‌ها از درجه‌ی دوم است و عملا وزن بولتزمن از جنس تابع گوسی است. این‌ها خوبی ماجراست. اما از آن سو پیچیدگی‌هایی هم وجود دارد. اول این که تعداد متغیرهایی که با آن‌ها سر و کار داریم بی‌شمار است. مثلا برای جرم و فنر فضای فاز تنها دو بعد داشت. البته این را از اول می‌دانستیم، چون معلوم بود که عملا با یک نظریه‌ی میدان طرف هستیم و در هر نقطه‌ی دلخواه $\vec{x}$ سه متغیر دینامیک داریم: (A_1, A_2, A_3) و به همین تعداد متغیر تکانه. پس تابع پارش ما تبدیل به چیزی مانند انتگرال مسیر می‌شود.

$$Z = \int D\vec{A}(\vec{x}) D\vec{E}(\vec{x}) \exp\left[-\frac{\beta}{2}\int d^3x \left(\epsilon_0 \left\|\overrightarrow{E}(\vec{x})\right\|^2 + \frac{1}{\mu_0}\left\|\nabla\times\overrightarrow{A}(\vec{x})\right\|^2\right)\right]. \qquad (45)$$

نماد $D\vec{A}(\vec{x})$ به معنی جمع زدن روی تمام حالت‌هایی است که تابع $\vec{A}(\vec{x})$ به خودش می‌گیرد و معمولا در محاسبه‌ی انتگرال مسیرها با آن مواجه می‌شویم. شاید به دست آوردن این تابع پارش وحشتناک به نظر بیاید. هرچند که واقعا این طور نیست، ولی الان اصولا نیازی به حساب کردن این انتگرال‌مسیر نیست. هدف ما یافتن مقدار چشم‌داشتی چگالی انرژی یا کمیت‌هایی از این دست است که برای این کار تنها نیاز است بلد باشیم انتگرال‌های گوسی بگیریم. باز برای این که ساده‌تر بشود مسیر کار را دنبال کرد، راه را به چند ایستگاه تقسیم می‌کنیم و ایستگاه به ایستگاه جلو می‌رویم تا به هدف برسیم. اولین ایستگاه این است که میدان‌های $\vec{E}$ و $\vec{A}$ را برحسب مدهای فوریه‌شان بنویسیم. در ایستگاه دوم متوجه می‌شویم که جمع روی همه‌ی حالت‌های $\vec{E}$ و $\vec{A}$ درست نیست و برای همین کمی باید در نوشتن تابع پارش و در نتیجه مقدارچشمداشتی‌ها با دقت بیشتری جلو برویم. در آخر هم با داشتن همیلتونی به شکل مناسب، انتگرال‌های گوسی را می‌گیریم و نتیجه‌ی نهایی به دست می‌آید. این قدم‌ها را در جعبه‌های زیر به ترتیب انجام می‌دهیم.

جعبه‌ی دو: فضای فوریه و قید روی میدان‌های الکتریکی

در این جعبه، همیلتونی (44) بر حسب مدهای فوریه‌ی میدان‌ها می‌نویسیم. نشان می‌دهیم این تبدیل، یک تبدیل قانونی است. علاوه بر این، به خاطر اعمال شرط $\nabla\cdot\vec{E} = 0$ می‌بینیم که مناسب است تغییراتی در همیلتونی داده شود.

ابتدا پتانسیل برداری و میدان الکتریکی را در فضای فوریه می‌نویسیم. یعنی:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\vec{A}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{A}(\vec{k})^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right), \tag{46}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\vec{E}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{E}(\vec{k})^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right). \tag{47}$$

مشخص است که به خاطر حقیقی بودن این میدان‌ها داریم: $\vec{A}(\vec{k})^* = \vec{A}(-\vec{k})$ و $\vec{E}(\vec{k})^* = \vec{E}(-\vec{k})$.

شاید تبدیل فوریه یک تبدیل ساده و طبیعی به نظر بیاید. اما وقتی تبدیلی در مختصات کانونی می‌دهیم، باید این تبدیل‌ها جوری باشند که معادله‌های همیلتون را به هم نریزند، به عبارتی باید تبدیل قانونی باشد. دیدیم که میدان الکتریکی تکانه‌ی همیوغ پتانسیل برداری است، یعنی $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\pi}(\vec{x})$. بنابراین باید ببینیم مختصه‌های جدید، یعنی $\vec{E}(\vec{k})$ و $\vec{A}(\vec{k})$ همچنین رابطه‌ای با هم دارند. کنش را بازنویسی می‌کنیم:

$$\int d^3x \left\|\vec{E}(\vec{x})\right\|^2 = 4\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\vec{E}(\vec{k})\cdot\vec{E}(\vec{k})^*, \tag{48}$$

$$\int d^3x \left\|\nabla\times\vec{A}(\vec{x})\right\|^2 = 4\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k})\cdot\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k})^*. \tag{49}$$

از آن جا که رابطه‌ی بین میدان الکتریکی و پتانسیل‌های نرده‌ای و برداری خطی است، تبدیل فوریه‌های آن‌ها هم با هم رابطه‌ی خطی دارند:

$$\vec{E}(\vec{k}) = \partial_t\vec{A}(\vec{k}) - i\vec{k}\phi(\vec{k}). \tag{50}$$

پس لاگرانژی عبارت است از

$$L = 2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\left(\partial_t\vec{A}(\vec{k}) - i\vec{k}\phi(\vec{k})\right)\cdot\left(\partial_t\vec{A}(\vec{k})^* + i\vec{k}\phi(\vec{k})^*\right) - \vec{k}\times\vec{A}(\vec{k})\cdot\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k})^*\right]. \tag{51}$$

از این جا روشن است که

$$\vec{\pi}_{\vec{A}(\vec{k})} \coloneqq \frac{\delta L}{\delta\partial_t\vec{A}(\vec{k})} = \frac{2}{(2\pi)^3}\left(\partial_t\vec{A}(\vec{k})^* + i\vec{k}\phi(\vec{k})^*\right) = \frac{2}{(2\pi)^3}\vec{E}(\vec{k})^*. \tag{52}$$

یعنی $\frac{2}{(2\pi)^3}\vec{E}(\vec{k})^*$ تکانه‌ی همیوغ $\vec{A}(\vec{k})$ است و معادله‌های همیلتون برای این متغیرها برقرار است. پس تبدیل فوریه به شکلی که گفته شد، تبدیلی قانونی است که توصیف دستگاه را از یک مختصات به مختصاتی دیگر می‌برد. پس می‌توانیم در تابع پارش (45) به جای انتگرال‌گیری روی حالت‌های $\vec{A}(\vec{x})$ و $\vec{E}(\vec{x})$، روی $\vec{A}(\vec{k})$ و $\vec{E}(\vec{k})$ جمع بزنیم. یعنی بنویسیم

$$Z = \int D\vec{A}(\vec{k})D\vec{E}(\vec{k})\exp\left[-\beta H\left[\vec{A}(\vec{k}),\vec{E}(\vec{k})\right]\right]. \tag{53}$$

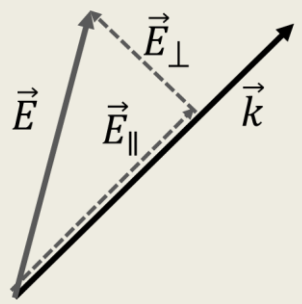
به این ترتیب باید همیلتونی را برحسب مختصات جدید بنویسیم که آن‌هم کار پیچیده‌ای نیست:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left(\epsilon_0 \left\|\vec{E}(\vec{x})\right\|^2 + \frac{1}{\mu_0}\left\|\vec{B}(\vec{x})\right\|^2\right)$$
$$= 2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\epsilon_0 \vec{E}(\vec{k})^* \cdot \vec{E}(\vec{k}) + \frac{1}{\mu_0}\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k})^* \cdot \vec{k}\times\vec{A}(\vec{k})\right). \tag{54}$$

تنها نکته‌ای که در محاسبه‌ی تابع پارش سرراست نیست این است که میدان الکتریکی نمی‌تواند هر تابع دلخواهی باشد و اگر جمع روی همه جور تابع را بزنیم، اشتباه کرده‌ایم. چرا؟ چون در خلا همیشه داریم $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x}) = 0$ و درنتیجه تنها تابع‌هایی را باید در جمع‌مان بیاوریم که این خاصیت را دارند. به نظر کار سختی می‌رسد که جمع را محدود کنیم. اما راه ساده‌تری وجود دارد. فکر می‌کنید بتوانید این راه حل را پیدا کنید؟ به نظر ما به امتحانش می‌ارزد. فقط بگذارید ایده را بگوییم. *شاید بشود همیلتونی را طوری تغییر داد که سهم میدان‌هایی که در قید را برآورده نمی‌کنند در همیلتونی جدید صفر شود.*

روش معمول این است: قید $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x}) = 0$ می‌گوید که $\vec{k}\cdot\vec{E}(\vec{k}) = 0$، یعنی میدان الکتریکی باید بر بردار $\vec{k}$ عمود باشد. میدان دلخواه $\vec{E}(\vec{k})$ را در نظر بگیرید که می‌تواند در این رابطه صدق کند یا نکند. در هر صورت می‌توان آن را به دو مولفه‌ی موازی با بردار $\vec{k}$ و عمود بر این بردار تقسیم کرد، یعنی نوشت: $\vec{E}(\vec{k}) = \vec{E}_\perp(\vec{k}) + \vec{E}_\parallel(\vec{k})$. این تقسیم بندی را در شکل پایین نشان داده‌ایم. اگر بتوانیم عملگری پیدا کنیم که وقتی روی میدان الکتریکی اثر می‌کند، قسمت $\vec{E}_\perp$ میدان را نگه دارد و قسمت موازی را دور بریزد مشکلمان حل می‌شود. چون از همین عملگرها در همیلتونی اضافه می‌کنیم تا سهم جمله‌هایی که نباید حضور داشته باشند را صفر کند. با این حساب باید دنبال عملگری بگردیم که خاصیت زیر را داشته باشد:

$$\boldsymbol{P}(\vec{k})\,\vec{E}(\vec{k}) = \vec{E}_\perp(\vec{k}). \tag{55}$$



شکل ۳- تقسیم میدان الکتریکی دلخواه به بخش‌های موازی و عمود بر بردار موج

از آنجا که میدان الکتریکی برداری سه مولفه‌ای است، عملگر $\boldsymbol{P}$ ماتریسی سه در سه است. مشخص است که این ماتریس چگونه باید باشد، باید تمام مولفه‌های موازی با $\vec{k}$ را بکشد و یک مولفه را باقی بگذارد. فکر می‌کنیم دیگر شما هم به راحتی چنین عملگری را بتوانید بسازید. جواب نهایی این است:

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \tag{56}$$

می‌توانید امتحان کنید و ببینید $\boldsymbol{P}_{ij}k_j = 0$. این عملگر، یک عملگر افکنش است و در نتیجه اگر دو بار روی یک بردار اثر کند نتیجه با یک بار عمل کردن این عملگر فرقی نمی‌کند، یعنی $\left(\boldsymbol{P}(\vec{k})\right)^2 = \boldsymbol{P}(\vec{k})$.

قسمت مربوط به میدان الکتریکی همیلتونی (44) را در نظر بگیرید. اگر این قسمت از همیلتونی را با همیلتونی زیر جایگزین کنیم،

$$H_E = 2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\epsilon_0 \vec{E}(\vec{k})^* \cdot \boldsymbol{P}(\vec{k}) \cdot \vec{E}(\vec{k})\right) \tag{57}$$

و حالا در تابع پارش روی همه‌ی حالت‌های میدان الکتریکی جمع بزنیم، قسمت‌هایی که غیر فیزیکی هستند و میدان موازی با بردار عدد موج است، انرژی صفر می‌دهند و در تابع پارش ضریب واحد درست می‌کنند و قسمت‌های فیزیکی که وجود یا عدم وجود عملگر $\boldsymbol{P}$ برایشان فرقی نمی‌کند همان سهم قبلی در تابع پارش را دارند. دقت کنید که در رابطه‌ی بالا از نمادگذاری زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\vec{E}^* \cdot \boldsymbol{P} \cdot \vec{E} = \sum_{i,j} E_i^* \boldsymbol{P}_{ij} E_j. \tag{58}$$

بنابراین مشکل قید روی میدان‌های الکتریکی را حل کرده‌ایم. می‌ماند پتانسیل برداری. جالب است که توجه کنیم که

$$\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k})^* \cdot \vec{k} \times \vec{A}(\vec{k}) = k^2 \vec{A}(\vec{k})^* \cdot \boldsymbol{P}(\vec{k}) \cdot \vec{A}(\vec{k}). \tag{59}$$

یعنی این عاملی که ما در مورد میدان الکتریکی دستی اضافه کردیم در این مورد خود به خود وارد می‌شود و عملا باعث می‌شود که پتانسیل برداری، مولفه‌ای در راستای بردار عدد موج نداشته باشد. پس کل همیلتونی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و در محاسبه‌ی تابع پارش جمع را با خیال راحت روی همه‌ی حالت‌های میدان‌ها می‌گیریم.

$$H = 2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\epsilon_0 \vec{E}(\vec{k})^* \cdot \boldsymbol{P}(\vec{k}) \cdot \vec{E}(\vec{k}) + \frac{k^2}{\mu_0} \vec{A}(\vec{k})^* \cdot \boldsymbol{P}(\vec{k}) \cdot \vec{A}(\vec{k})\right). \tag{60}$$

پیشنهاد می‌کنیم که خواننده معادله‌های حرکت همیلتون به دست آمده از این همیلتونی جدید را بنویسد و از این راه معادله‌ی حرکت موج عرضی را به دست آورد.

نتیجه‌ی نهایی: با تبدیل مختصات به فضای فوریه و اعمال قید $\nabla \cdot \vec{E} = 0$، همیلتونی به شکل رابطه‌ی (60) در می‌آید.

ببینیم تا کنون چه مسیری را آمده‌ایم: مختصه‌های کانونی را برای مساله‌ی الکترومغناطیس نوشته‌ایم و بعد همیلتونی را برای این مختصات به دست آورده‌ایم. در نهایت هم همه چیز را به فضای فوریه برده‌ایم. چیزی که به نظر می‌آید باید بنویسیم تابع پارش است. اما درست نگاه کنیم می‌بینیم که نیازی به نوشتن تابع پارش نیست. کمیت‌هایی که لازم دارم به دست بیاوریم چیزهایی از جنس $\langle E_i(\vec{k})E_j(\vec{k'})\rangle$ یا همان همبستگی‌های میدان است که کافی است انتگرال‌های گوسی بلد باشیم تا بتوانیم آن‌ها را حساب کنیم. خوبی رفتن به فضای فوریه همین است که به دست آوردن تابع پارش و توابع همبستگی در این فضا

ساده‌تر و سرراست‌تر است، چون مدهای مختلف از هم جدا هستند. محاسبه‌ی انتگرال‌های گوسی و همبستگی را هم در یک جعبه می‌آوریم و به مقصد نزدیک می‌شویم.

جعبه‌ی سه. محاسبه همبستگی‌های میدان‌ها با استفاده از انتگرال‌های گوسی.

تابع پارشی که می‌خواهیم از روی آن همبستگی‌های میدان را حساب کنیم از همیلتونی (60) به دست می‌آید ولی ما اندکی این همیلتونی را تغییر می‌دهیم. اول این که چون می‌دانیم $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$، عملگر $\boldsymbol{P}$ را با مجذورش جایگزین می‌کنیم. علاوه بر این، به کل همیلتونی جمله‌ی چشمه‌ی میدان اضافه می‌کنیم، یعنی جمله‌هایی که به صورت خطی متناسب با میدان باشند. پس می‌نویسیم:

$$H_{\text{Tot.}} = H + H_J \tag{61}$$

که

$$H = 2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\left(\boldsymbol{P}(\vec{k})\cdot\vec{E}(\vec{k})\right)^\dagger \left(\boldsymbol{P}(\vec{k})\cdot\vec{E}(\vec{k})\right) + k^2\left(\boldsymbol{P}(\vec{k})\cdot\vec{A}(\vec{k})\right)^\dagger \left(\boldsymbol{P}(\vec{k})\cdot\vec{A}(\vec{k})\right)\right) \tag{62}$$

و

$$H_J := \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big(E^\dagger(\vec{k})\cdot\boldsymbol{P}(\vec{k})\cdot J_E(\vec{k}) + J_E^\dagger(\vec{k})\cdot\boldsymbol{P}(\vec{k})\cdot E(\vec{k}) + A^\dagger(\vec{k})\cdot\boldsymbol{P}(\vec{k})\cdot J_A(\vec{k}) + J_A^\dagger(\vec{k})\cdot\boldsymbol{P}(\vec{k})\cdot A(\vec{k})\Big). \tag{63}$$

عملگرهای $\boldsymbol{P}$ را در قسمت جریان هم گذاشته‌ایم که خیالمان راحت باشد که میدان‌ها عرضی هستند. معادل این کار می‌توان جور دیگری عمل کرد. اگر این عملگرها روی جمله‌های جریان، یعنی J ها اثر کنند، آن‌ها را عرضی می‌کنند. از آنجا که ما این جمله‌ها را دستی وارد کرده‌ایم، آن‌ها را از ابتدا عرضی در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم برای هر دو جریان مربوط به میدان الکتریکی و پتانسیل مغناطیسی داریم $\boldsymbol{P}(\vec{k})\cdot J = J$. پس می‌شود عملگرهای $\boldsymbol{P}$ را در جریان‌ها جذب کرد. اصولا دلیل اضافه کردن جمله‌های جریان این است که همبستگی‌های میدان را با مشتق‌گیری از تابع پارش بتوان به دست آورد. به عبارت دقیق‌تر بتوان نوشت:

$$\langle E_i(\vec{k})E_j(\vec{k'})^*\rangle := \frac{\int DE\, DA e^{-\beta H_{\text{Tot.}}} E_i(\vec{k})E_j(\vec{k'})^*}{\int DE\, DA e^{-\beta H_{\text{Tot.}}}} = \frac{1}{Z\beta^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J_{Ei}(\vec{k})^*\delta J_{Ej}(\vec{k'})}\Bigg|_{J_E=J_A=J_E^\dagger=J_A^\dagger=0} \tag{64}$$

و

$$\langle A_i(\vec{k})A_j(\vec{k'})^*\rangle := \frac{\int DE\, DA e^{-\beta H_{\text{Tot.}}} A_i(\vec{k})A_j(\vec{k'})^*}{\int DE\, DA e^{-\beta H_{\text{Tot.}}}} = \frac{1}{Z\beta^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J_{Ai}(\vec{k})^*\delta J_{Aj}(\vec{k'})}\bigg|_{J_E=J_A=J_E^\dagger=J_A^\dagger=0}. \tag{65}$$

برای گرفتن انتگرال‌های گوسی کافی است که در نما مربع کامل به وجود بیاوریم. خوبی فضای فوریه این است که عددهای موج مختلف را جداگانه می‌توان در نظر گرفت. نتیجه‌ی کار به نسبت ساده است:

$$Z \propto \exp\left(\frac{\beta}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{J_E^\dagger(\vec{k})\cdot \boldsymbol{P}(\vec{k})\cdot J_E(\vec{k})}{\epsilon_0} + \frac{\mu_0}{k^2}J_A^\dagger(\vec{k})\cdot \boldsymbol{P}(\vec{k})\cdot J_A(\vec{k})\right)\right). \tag{66}$$

چون در ثابت تناسب جمله‌های وابسته به جریان وجود ندارد، در محاسبه‌های ما وارد نمی‌شود. با مشتق‌گیری از جریان‌ها همبستگی میدان‌های الکتریکی و پتانسیل‌های برداری را به دست می‌آوریم.

$$\langle E_i(\vec{k})E_j(\vec{k'})^*\rangle = \frac{(2\pi)^3 k_B T}{\epsilon_0}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\boldsymbol{P}_{ij}(\vec{k})\delta_{ij} \tag{67}$$

$$\langle A_i(\vec{k})A_j(\vec{k'})^*\rangle = \frac{(2\pi)^3 \mu_0 k_B T}{k^2}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\boldsymbol{P}_{ij}(\vec{k})\delta_{ij}. \tag{68}$$

بقیه‌ی همبستگی‌ها هم صفرند از جمله عبارت‌هایی که در آن‌ها یکی از مولفه‌های میدان الکتریکی و یکی از مولفه‌های پتانسیل برداری قرار دارد، مثل $\langle E_i A_j\rangle$. با این که همبستگی‌ها را به‌دست آورده‌ایم، اما در کارمان نیاز به همبستگی میدان مغناطیسی داریم و نه پتانسیل مغناطیسی. خوشبختانه از تابع همبستگی $\langle A_i(\vec{k})A_j(\vec{k'})^*\rangle$ می‌شود تابع همبستگی $\langle B_i(\vec{k})B_j(\vec{k'})^*\rangle$ را حساب کرد. از آنجا که $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ در فضای فوریه داریم $\vec{B}(\vec{k}) = i\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k})$ و در نتیجه:

$$\langle B_i(\vec{k})B_j(\vec{k'})^*\rangle = \frac{(2\pi)^3\mu_0 k_B T}{k^2}\epsilon_{imr}\epsilon_{jns}k_m k_n \boldsymbol{P}_{rs}(\vec{k})\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\delta_{ij} = (2\pi)^3\mu_0 k_B T\, \boldsymbol{P}_{ij}(\vec{k})\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\delta_{ij}, \tag{69}$$

که ϵ_{imr} تانسور لوی-چویتا است. برای به دست آوردن آخرین تساوی به دو نکته توجه کرده‌ایم:

۱. $\epsilon_{imr}k_m k_r = 0$.
۲. $\epsilon_{imr}\epsilon_{jns}\delta_{rs} = \delta_{ij}\delta_{mn} - \delta_{in}\delta_{mj}$.

دقت کنید که این رابطه به روشنی با معادله‌ی $\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x}) = 0$ و یا هم‌ارز آن $\vec{k}\cdot\vec{B}(\vec{k}) = 0$ سازگار است.

نتیجه‌ی نهایی: همبستگی میدان‌های الکتریکی و پتانسیل برداری با رابطه‌های (67) و (69) داده می‌شود. سایر همبستگی‌ها صفر است.

همبستگی‌هایی که در این جعبه به‌دست آورده‌ایم بسیار شبیه به روابطی (26) و (27) است، هر چند که از راه دیگری به دست آمده‌اند. در به دست آوردن روابط (26) و (27) از حل معادله‌های حرکت استفاده کرده‌بودیم و در طول زمان یا در حجمی مشخص میانگین گرفته بودیم. اما در اینجا میانگین‌گیری هنگردی انجام دادیم و این دو میانگین‌گیری برهم منطبق شد. قضیه‌ی ارگودیک همین را می‌گوید که این دو جور میانگین‌گیری با هم برابر است. احتمالا به تفاوت‌های این دو زوج رابطه هم توجه کرده‌اید. مثلا در روابط (67) و (69) عنصر $\boldsymbol{P}_{ij}$ وجود دارد ولی در روابط (26) و (27) این کمیت موجود نیست. این تفاوت به این دلیل است که وقتی بعد از حل معادله‌ها کمیت‌ها را حساب می‌کنیم، در طی حل، قیدهای مساله را اعمال کرده‌ایم و نیازی نیست که به شکل واضح بنویسیم که مثلا در آن مورد خاص حل‌های معادله‌ها موج‌های عرضی هستند و قید را برآورده می‌کنند. اما زمانی که اصولا پیکربندی‌های دلخواه دستگاه را در نظر می‌گیریم، هنوز قیدها اعمال نشده‌اند و باید به شکل صریحی این قیدها در جواب بیایند. علاوه براین ثابت‌های کنار تابع دلتای دیراک در روابط (26) و (27) را در این رویکرد به دست آورده‌ایم. اگر می‌خواستیم در رویکرد قبلی این ثابت‌ها را به دست بیاوریم، باید از قضیه‌ی همپاری استفاده می‌کردیم و به هر مد نوسانی انرژی‌ای متناسب با k_BT می‌دادیم که ضریبی مشابه آنچه اینجا به دست آوردیم را می‌دیدیم.

باید برگردیم سراغ سوال اصلی‌مان: ارتباط چگالی انرژی و توان تابشی. حتما خنده‌تان می‌گیرد اگر بگوییم در این چارچوب نمی‌شود این سوال را جواب داد و می‌گویید: «این همه هیاهو برای هیچ؟!» نه، برای هیچ که نبوده، ولی اول بگذارید ببینیم چرا نمی‌توانیم به این سوال جواب دهیم. چگالی الکترومغناطیسی را می‌توانیم به از این راه به دست آوریم (که متاسفانه بی‌نهایت می‌شود!) ولی کمیت میزان تابش چه؟ برای میزان تابش باید بردار پوینتینگ را بررسی کرد، یعنی $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$. چیزی هم که نیاز داریم مقدار متوسط این کمیت است. پیشتر دیده‌ایم که همبستگی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی صفر است، یعنی

$$\langle E_i(\vec{k})B_j(\vec{k})\rangle = 0. \tag{70}$$

پس میانگین بردار پوینتینگ هم برای هر دستگاه الکترومغناطیسی در حال تعادل گرمایی صفر است. البته این نتیجه بدیهی‌است. چون اگر غیر صفر بود، انرژی از سویی به سوی دیگر می‌رفت و دستگاه در تعادل نمی‌ماند. پس اگر برای دستگاه تعادلی بخواهیم چنین چیزی را حساب کنیم طبیعی است که صفر در می‌آید. اما پس چه چیزی را در بخش قبل حساب کرده بودیم. در بخش قبل معادله‌های حرکت حل شده بود و می‌دانستیم هر موج از چه سو به چه سو می‌رود. بعد در یک نقطه‌ی دلخواه، موج‌های چپ‌رو را از موج‌های راست‌رو جدا کرده بودیم و فقط شار یکی از این دسته‌ها را به حساب آورده بودیم. این کار را در این چارچوب کاری نمی‌توانیم بکنیم و فقط می‌توانیم نتیجه‌های بدیهی که از روی تعادلی بودن دستگاه هم می‌شد فهمید را به دست آوریم.

خب پس این همه محاسبه به چه درد می‌خورد؟ نگران نباشید، به درد می‌خورد. اول اینکه انجام چنین محاسبه‌هایی لذت‌بخش است، دست‌کم برای ما دو نویسنده این طور بود. دوم، این محاسبه‌ها مقدار زیادی شهود و اطلاعات درباره‌ی دستگاه الکترومغناطیس در تعادل و اصولا روش مکانیک آماری ایجاد می‌کند. سوم، راه ساده‌ای است که بشود با مقدمات نظریه‌ی میدان و روش‌های انتگرال‌مسیر در آن آشنا شد، به خصوص برای نظریه‌ی الکترودینامیک کوانتمی. اما جدا از این‌ها با این روش دست‌کم می‌شود فشار را حساب کرد، که البته در آغاز کار دیدیم این رابطه چه‌قدر مهم است و قانون استفان بولتزمن را می‌دهد.

در بخش قبل گفته بودیم که با استفاده از تانسور تنش می‌شود فشار را حساب کرد، مثلا

$$P = -\frac{1}{2}\epsilon_0\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2\right) - \frac{1}{2\mu_0}\left(B_x^2 - B_y^2 - B_z^2\right). \tag{71}$$

تنها کاری که باید بکنیم این است که از میانگین هنگردی سمت راست را حساب کنیم. چگالی انرژی هم با عبارت

$$u(x) = \frac{1}{2}\epsilon_0\|\vec{E}(\vec{x})\|^2 + \frac{1}{2\mu_0}\|\vec{B}(\vec{x})\|^2 \tag{72}$$

داده می‌شود. هر دوی این عبارت‌ها را می‌شود در فضای فوریه بازنویسی کرد و نشان‌داد که با هم برابرند. اما دوست داریم این تساوی را در فضای مکان نشان دهیم. می‌دانیم $\vec{E}(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\vec{E}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{E}(\vec{k})^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)$. با در نظر گرفتن همبستگی به دست آمده برای میدان‌های الکتریکی، یعنی رابطه‌ی (67)، به دست می‌آید که

$$\langle E_i(\vec{x})E_j(\vec{x'})\rangle = \frac{2k_BT}{\epsilon_0}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}P_{ij}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x'})}. \tag{73}$$

ما همبستگی میدان با خودش در همان نقطه را می‌خواهیم، یعنی در $\vec{x} = \vec{x}'$. پس

$$\langle E_i(\vec{x})E_j(\vec{x})\rangle = \frac{2k_BT}{\epsilon_0}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\boldsymbol{P}_{ij}(\vec{k}) = \frac{k_BT}{\epsilon_0}\frac{4}{3}\delta^3(\vec{0})\delta_{ij}. \tag{74}$$

برای به دست آوردن این رابطه گام‌های زیر را برداشته‌ایم: ابتدا انتگرال روی عدد موج را در مختصات قطبی باز کرده‌ایم.

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\boldsymbol{P}_{ij}(\vec{k}) = \left(\int \frac{dk}{(2\pi)^3}k^2\right)\int d\Omega\left(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j\right). \tag{75}$$

انتگرال روی زاویه‌ی فضایی و قسمت شعایی $\vec{k}$ را می‌توان جدا جدا انجام داد که نتیجه‌اش می‌شود

$$\begin{gathered}\int d\Omega\left(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j\right) = \frac{8\pi}{3}\delta_{ij} \\ \int \frac{dk}{(2\pi)^3}k^2 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{1}{4\pi}\delta^3(\vec{0})\end{gathered} \tag{76}$$

و عبارت بالا برای همبستگی میدان‌ها را درست می‌کند. مشابه همین روابط را هم می‌توانید برای میدان مغناطیسی هم به دست آورید. نکته‌ای که ممکن است باعث ناراحتی باشد وجود جمله‌ی $\delta^3(\vec{0})$ است. این کمیت که کلا تعریف شده نیست و اگر به یک ریاضی‌دان نشان دهیم، احتمالا ناراحت می‌شود. از دید ما فیزیکی‌ها، این جمله یعنی این که انرژی واگراست و منشا آن را هم می‌شناسیم. بینهایت مد نوسانی داریم و هر یک به اندازه‌ی k_BT انرژی دارند، پس انرژی، و در نتیجه چگالی انرژی باید واگرا باشد. اما اگر واگرایی را با همین شکلش بپذیریم، می‌توانیم جلو برویم و ارتباط چگالی با فشار را در آوریم. چیزی که از عبارت بالا دستگیرمان می‌شود این است که

$$\langle E_i(\vec{x})^2\rangle = \frac{1}{3}\langle\left\|\vec{E}(\vec{x})\right\|^2\rangle \tag{77}$$

و رابطه‌ی مشابهش برای میدان مغناطیسی. حالا برمی‌گردیم به فشار و از رابطه‌ی (71) با توجه به معادله‌ی بالا میانگین‌گیری هنگری می‌کنیم .

$$P=\frac{1}{2}\epsilon_0\frac{\langle\|\vec{E}(\vec{x})\|^2\rangle}{3}+\frac{1}{2\mu_0}\frac{\langle\|\vec{B}(\vec{x})\|^2\rangle}{3}=\frac{u}{3}. \tag{78}$$

نتیجه به دست آمده و بسیار لذت‌بخش است.

مراجع

[1] Blundell, S., & Blundell, K. M. (2010). *Concepts in thermal physics*. Oxford: Oxford University Press.

[2] Fourier J.B., (1822).*The Analytical Theory of Heat* (English translation by Alexander Freeman, 1878 ed.).

[3] Griffiths, D. J. (1999). *Introduction to electrodynamics*. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall.