نگاه کلاسیک به نیروهایی که از ذرات تبادلی به وجود می‌آیند

فرهنگ لران (دانشگاه صنعتی اصفهان)، سامان مقیمی‌عراقی (دانشگاه صنعتی شریف)

تصویر ما از بسیاری از نیروهای بنیادی این است که این نیروها حاصل تبادل ذرات دیگری است. مثلا تبادل فوتون باعث نیروی الکتریکی می‌شوند یا ذرات دیگری نیروهای هسته‌ای را به وجود می‌آورند. این تصویرها عمدتا در چارچوب نظریه‌ی میدان کوانتمی بررسی می‌شود. در این مقاله همین مفهوم را در چارچوب مکانیک کلاسیک ارایه می‌دهیم تا به دور از پیچیدگی‌های نظریه‌ی میدان کوانتمی، جان‌مایه آن را به روشنی ببینیم.

۱ مقدمه

وقتی نیوتن قانون گرانش عمومی را ارایه کرد، دیدگاهش این بود که اثر نیرو بی‌درنگ بر اجسام دور و نزدیک اعمال می‌شود. به اصطلاح گفته می‌شود که نظریه‌ی گرانش نیوتنی کنش از دور است. مثلا فرض کنید که به ناگاه کل جرم خورشید نیست و نابود شود. طبق این نظریه، در همین لحظه، نیروی گرانشی وارد بر زمین حذف می‌شود و پس از آن حرکت زمین کم و بیش روی خط راست خواهد بود. طبیعتا این نگرش با نسبیت خاص سازگار نیست و تلاش‌های بسیاری شد تا شکل این نگرش تغییر کند. در طبیعت نیروی دیگری مشابه نیروی گرانشی وجود دارد: نیروی الکتریکی یا بهتر بگوییم الکترومغناطیسی. اگر به شکل قانون کولن به این نیرو نگاه کنیم، نیروی الکتریکی هم همین مشکل را دارد. یعنی اگر بار الکتریکی، جایی تغییر کند، اثر این تغییر در لحظه در تمام نقاط دنیا دیده می‌شود. خوشبختانه ساختار نظریه‌ی کامل الکترومغناطیس، و نه قانون کولن، که کاملا منطبق بر نسبیت خاص است، این مساله را حل کرده‌است. ایده به طور خلاصه این است: اگر جایی بار الکتریکی تغییر کند، میدان الکتریکی و *مغناطیسی* اطراف این بار عوض می‌شود. این تغییرات میدان عملا باعث ایجاد موج الکترومغناطیسی می‌شود، یعنی افت‌وخیز به وجود آمده در میدان‌های الکترومغناطیسی با سرعت نور در اطراف منتشر می‌شود و در نهایت باعث می‌شود که میدان الکتریکی در نقاط مختلف دنیا تغییر کند. با این دیدگاه، اگر تغییری در بار الکتریکی در نقطه‌ای از فضا دهیم، اثر آن درلحظه در نقطه‌ای دیگر دیده نمی‌شود، بلکه به اندازه‌ای که نیاز است تا نور مسافت این دو نقطه را بپیماید باید صبر کنیم تا اثر این تغییر در نقطه‌ی دوم دیده شود. به این ترتیب نظریه‌ی کنش بین بار-بار تبدیل شده است به کنش بار-میدان و میدان-بار و همین واسطه قرار دادن میدان مساله را حل کرده‌است.

اما تنها نیروی طبیعت نیروی الکترومغناطیسی نیست. گرانش و نیروهای هسته‌ای هم باید این سازگاری را داشته باشند. گرانش داستان پیچیده‌ای دارد و نظریه‌ی نسبیت عام عملا این چارچوب را به وجود می‌آورد که از شکل برهمکنش جرم-جرم، به برهمکنش جرم-فضازمان و فضازمان-جرم برویم و افت‌وخیزها به صورت موج‌های گرانشی منتشر شوند. نیروهای هسته‌ای با نگاه متفاوتی دیده شده‌اند. بررسی کمّی این نیروها زمانی انجام شد که دینامیک کوانتمی و نظریه‌ی میدان کوانتمی را شناخته بودیم. در این دینامیک، حتی مساله‌ی الکترومغناطیس به گونه‌ای دیگر دیده می‌شد: ذره‌ای وجود دارد که واسطه‌ی ایجاد برهمکنش الکترومغناطیسی است، فوتون. یعنی وقتی دو ذره‌ی باردار با هم برهمکنش الکترومغناطیسی دارند، از یکی از ذرات

فوتونی به دومی ساطع می‌شود و باعث می‌شود که تکانه یکی به دیگر منتقل شود. این فوتون تبادلی البته برای خود داستانی دارد، مثلا اصطلاحا می‌گوییم ذره‌ای مجازی است چون رابطه‌ی استاندارد بین بسامد و طول موج را ارضا نمی‌کند.

همین ایده، برای توصیف نیروهای هسته‌ای هم به کار رفته‌است. در نگارش ابتدایی‌اش ذراتی که مبادله می‌شدند مزون‌ها بودند و در نگارش کنونی، برای نیروی هسته‌ای ضعیف ذرات Z و $W^{\pm}$ هستند و برای نیروهای هسته‌ای قوی، گلوئون‌ها [۱]. به کارگیری این ایده کلا در چارچوب نظریه‌ی میدان کوانتمی بوده و در نتیجه نوع پرسش‌هایی که پاسخ داده می‌شود هم در همان چارچوب است. هر چند که با همین نگرش، در حد انرژی‌های پایین پتانسیل موثر بین موجوداتی که چنین ذرات تبادلی‌ای رد و بدل می‌کنند به دست می‌آید. برای رسیدن به این توصیف و این نگاه باید راه طولانی‌ای در نظریه‌ی میدان کوانتمی پیمود. چیزی که ما در این مقاله نوشته‌ایم، باز کردن همین مساله در چارچوب مکانیک کلاسیک است، به دور از پیچیدگی‌هایی که در نظریه‌ی میدان کوانتمی وجود دارد.

در این مسیر نیاز به استفاده از چند مفهوم و فوت و فن است که اگرچه به نظر ما مفهوم‌ها و فوت و فن‌هایی مهم و جذاب هستند، اما در روال عادی آموزش دانشگاهی کمتر به آن‌ها پرداخته می‌شود. برای همین از این فرصت حسن استفاده را می‌کنیم و سعی می‌کنیم به بهانه‌ی حل مساله‌ای که بالاتر مطرح کردیم، این چند مفهوم و فوت و فن را باز کنیم و حتی در مساله‌هایی به نسبت پیش پا افتاده و غیر معمول به کار بگیریم: مفهوم‌هایی مثل انتشارگر، و کنش موثر.

۲ کنش الکترومغناطیس

بیایید برای شروع، مساله‌ی الکترومغناطیس را در نظر بگیریم. همان‌طور که گفتیم کلا مساله را کلاسیک جلو می‌بریم و هیچ اثر کوانتمی‌ای را بررسی نمی‌کنیم. معمولا توصیف میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی با چهار معادله‌ی ماکسول داده می‌شود. اما رهیافتی که ما می‌خواهیم در پی بگیریم، توصیف الکترومغناطیس با استفاده از دینامیک لاگرانژی است. بنابراین باید کنشی بنویسیم که با وردش گرفتن از آن معادله‌های ماکسول به دست آید. از آنجا که با یک نظریه‌ی میدان روبرو هستیم، لاگرانژی دستگاه به صورت انتگرال روی میدان‌ها تعریف می‌شود [۱]:

$$L = \int d^3x \, \left(-\frac{1}{4\mu_0} \, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right) + L_{\mathrm{matter}}. \tag{1}$$

بگذارید کمی در مورد این لاگرانژی صحبت کنیم. اول این که لاگرانژی را دو قسمت کرده‌ایم، قسمت مربوط به میدان‌ها، و قسمت مربوط به ماده‌ای که بار الکتریکی دارد. این قسمت دوم را با L_{matter} نشان داده‌ایم که مثلا اگر باری نقطه‌ای با جرم m باشد لابد جمله‌ای مانند $\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}_m}{dt}\right)^2$ دارد که در آن $\vec{r}_m$ مکان آن ذره است. به عنوان مثال نوسان‌گر هماهنگ ساده‌ای به جرم m و سختی فنر k را در نظر بگیرید که بار الکتریکی وزنه‌ی آن q است. آن‌گاه L_{matter} نظیر نوسان‌گر مشابهی است با همان جرم و سختی فنر که بار الکتریکی نداشته باشد. تکه‌ای که دینامیک میدان را توصیف می‌کند در واقع خودش دو بخش دارد. یکی فقط مربوط به میدان‌هاست، یعنی جمله‌ی اول داخل انتگرال و دومی تاثیر بار روی میدان‌ها و البته تاثیر میدان روی بارها. در این جمله، هم میدان ظاهر شده (A_μ) و هم حرکت ذره‌ی باردار (J^μ). مولفه‌های چاربردار $J^\mu := \left(c\rho, \vec{J}\right)$ با چگالی

بار الکتریکی ρ و چگالی جریان الکتریکی $\vec{J}$ داده می‌شوند که c سرعت نور است. در شکل لاگرانژی مساله‌ی الکترومغناطیس، مختصه‌های دینامیکی، میدان‌های الکترومغناطیسی نیستند، بلکه مختصه‌ی قانونی دراین مساله مولفه‌های چاربردار پتانسیل $A^{\mu} := \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$ است که با پتانسیل الکتریکی ϕ و پتانسیل برداری $\vec{A}$ داده می‌شوند. در ضمن چندان نگران بالا و پایین بودن اندیس‌ها نباشید. با توجه به این که در چارچوب نسبیت خاص کار می‌کنیم، تنها اتفاقی که با بالا و پایین بردن رخ می‌دهد این است که مولفه‌ی صفر، (یعنی مولفه‌ی زمانی) منفی می‌گیرد.

آن قسمت از لاگرانژی که مربوط به خود میدان‌هاست هم با تانسور شدت میدان بیان می‌شود. تعریف این تانسور به این صورت است:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}, \tag{2}$$

که منظور از ∂_{μ} مشتق پاره‌ای نسبت به مولفه‌ی x^{μ} از چاربردار مکان $x := (ct, \vec{x})$ است. باز هم اضافه کنیم که بالا و پایین کردن اندیس‌ها ساده است:

$$F^{\alpha\beta} := \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} F_{\mu\nu}$$

که $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ متریک مینکوفسکی است یعنی به ازای هر بار بالا و پایین بردن مولفه‌های زمانی یک منفی ظاهر می‌شود. تانسور شدت در دل خود مولفه‌های میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی را دارد:

$$E_i = -cF_{0i}$$
$$B_i = \epsilon_{ijk} F_{jk}$$

و ϵ_{ijk} نماینده‌ی تانسور لوی-چویتا است و اندیس‌های i و j و k فقط مربوط به قسمت‌های فضایی هستند. با توجه به این که کمیت‌های دینامیکی دستگاه را پتانسیل‌های الکترومغناطیسی گرفته‌ایم، باید معادله‌ی اویلر-لاگرانژ به این صورت بنویسیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta[\partial_t A^{\mu}(x)]} - \frac{\delta L}{\delta A^{\mu}(x)} = 0 \tag{3}$$

این معادله می‌گوید $\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^{\nu}$ که همان معادله‌ی ماکسول است، کافی است آن را بر حسب میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی باز کنیم. بگذارید به عنوان مثال الکترواستاتیک را در نظر بگیریم که در آن $\vec{A} = 0$ و $\vec{J} = 0$ و $\partial_t \phi = 0$. به این ترتیب داریم $F^{ij} = 0$ و $F^{i0} = \frac{1}{c} \partial_i \phi$. ساده شده‌ی معادله‌ی بالا در این حالت عبارت است از:

$$\frac{1}{c} \nabla^2 \phi = -\mu_0 c \rho \tag{4}$$

از آن‌جا که $c^2 = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1}$ می‌بینیم که این همان معادله‌ی پواسون است. در حالت کلی هم می‌توانید ببینید که معادلات ماکسول از معادله‌ی(3) به دست می‌آید. راستش را بگوییم، دوتا از معادلات ماکسول از این معادله به دست می‌آید، آن‌هایی که بار و جریان الکتریکی دارند. معادله‌های $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ و $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ مستقیما از این ناشی می‌شوند که فرض کرده‌ایم میدان‌های الکترومغناطیسی را می‌شود بر حسب پتانسیل‌ها نوشت.

در این نوشتار نمی‌خواهیم به بررسی کامل نظریه‌ی کلاسیک الکترومغناطیس بپردازیم. کاری که می‌خواهیم بکنیم این است که از لاگرانژی (1) جواب مساله‌ی میدان الکترومغناطیسی را حل کنیم، حل آن را در همین لاگرانژی قرار دهیم و حاصل کار بشود یک لاگرانژی موثر برای ماده. آن وقت بگوییم کل مساله شبیه به این است که بین بارهای الکتریکی چنین برهمکنشی وجود دارد. ساختن لاگرانژی موثر در بسیاری از مساله‌ها کاربرد دارد. برای همین سعی می‌کنیم از مثال‌های ساده این مطلب را باز کنیم تا بفهمیم کاری که انجام می‌دهیم دقیقا چیست. ساده‌ترین مساله در فیزیک که غیر بدیهی باشد چیست؟ نوسانگر هماهنگ. نوسانگر هماهنگ به قدری در فیزیک مهم است که اگر وجود نمی‌داشت شاید اصولا به بسیاری از دستاوردهای فیزیک نمی‌رسیدیم. در بخش بعد سعی می‌کنیم با در نظر گرفتن مساله‌ی نوسانگر هماهنگ ایده‌های کنش موثر را واضح کنیم.

۳ کنش موثر

برای بررسی رفتار یک جسم نیاز است که بدانیم اجسام که دور و بر چه نیروهایی به آن وارد می‌کنند. برای دانستن این نیروها باید بدانیم مکان این اجسام چیستند، به عبارتی باید معادله‌ی حرکت آن‌ها را هم حل کنیم. گاهی حرکت این اجسام دور و بر چندان برای ما اهمیت ندارد و می‌خواهیم توجه‌مان را متمرکز کنیم به جسم اصلی. برای همین سعی می‌کنیم یا به دقت یا به طور تقریبی مساله‌ی اجسام دور و بر را حل کنیم و حاصل حل را به صورت برهمکنشی موثر روی جسم اصلی قرار دهیم. بگذارید از ساده‌ترین حالت‌ها شروع کنیم. مثلا مساله‌ی فقط دو ذره که با هم برهمکنش دارند را بررسی کنیم و سعی کنیم معادله‌ی حرکت یکی را حل کنیم و برای دیگری کنش موثر بنویسیم. به طور کلی لاگرانژی دو ذره‌ی برهمکنش‌دار را می‌شود به این صورت نوشت:

$$L[x_1, x_2] \coloneqq L_1[x_1] + L_2[x_2] + V_{\mathrm{int}}(x_1, x_2). \tag{5}$$

رفتار هر کدام از ذره‌ها در نبود دیگری با لاگرانژی L_i داده می‌شود که $i = 1,2$ برچسب ذره‌ها است. جفت‌شدگی را هم با پتانسیل برهم‌کنشی $V_{\mathrm{int}}(x_1, x_2)$ داده‌ایم. اگر توجه‌مان روی رفتار ذره‌ی ۱ باشد و حرکت ذره‌ی دوم به خودی خود چندان اهمیتی برایمان نداشته باشد، می‌توانیم سعی کنیم اول معادله‌ی حرکت ذره‌ی ۲ را حل کنیم و $x_2(t)$ به دست بیاوریم. پاسخ به دست آمده را، که با $x_2^{(c)}(t)$ نشان‌اش می‌دهیم، به جای x_2 در L، قرار می‌دهیم و به لاگرانژی تازه‌ای می‌رسیم که دینامیک ذره‌ی ۱ را تعیین می‌کند. بگذارید با مثال جلو برویم تا شیوه‌ی کار واضح شود.

همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، ساده‌ترین مساله در فیزیک، نوسان‌گر هماهنگ است. دو نوسان‌گر هم‌آهنگ ساده به جرم‌های m_1 و m_2 و سختی فنر $k_1 = \omega_1^2 m_1$ و $k_2 = \omega_2^2 m_2$ را با فنری به سختی κ به هم جفت کرده‌ایم. در این مساله

$$L[x_1, x_2] = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 - \omega_2^2 x_2^2) - \kappa x_1 x_2 \tag{6}$$

می‌خواهیم متغیر x_2 را از این لاگرانژی حذف کنیم و لاگرانژی موثری برای ذره‌ی یک به دست بیاوریم. دقت کنید که در این مساله $L_1 = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2)$ و $L_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 - \omega_2^2 x_2^2)$ و $V_{\mathrm{int}} = -\kappa x_1 x_2$. معادله‌ی حرکت برای ذره‌ی ۲ را می‌نویسیم:

$$\ddot{x}_2+\omega_2^2 x_2=-\frac{\kappa}{m_2}x_1 \tag{7}$$

این معادله دقیق است و تا اینجا تقریبی به کار نبرده‌ایم. اما متاسفانه تا وقتی که مکان ذره‌ی اول را ندانیم نمی‌توانیم این مساله را حل کنیم! پس به نظر می‌آید که سازوکارمان به بن‌بست رسیده است. اما این طور نیست. کافی است که بتوانیم به ازای x_1 دلخواه، معادله‌ی بالا را حل کنیم. خوبی مساله‌ی نوسان‌گر هماهنگ این است که این کار شدنی است. اصولا اگر مساله‌ی اولیه خطی باشد این کار شیوه‌ی معروفی دارد که ما را به مفهوم انتشارگر می‌رساند. برای این که مقاله را راحت‌تر بشود دنبال کرد، این مفهوم را در جعبه‌ای آورده‌ایم. در نهایت، از نتیجه‌ای که در انتهای جعبه آمده و مثال‌هایی که در آن حل شده در مساله‌های این مقاله استفاده می‌کنیم.

جعبه: انتشارگر

در این جعبه، انتشارگر دو مساله‌ی ساده را بررسی می‌کنیم. این مفهوم در بسیاری از مساله‌های فیزیکی، به خصوص مسایلی که به نظریه‌ی میدان مربوط است، دیده می‌شود. معادله‌ی دیفرانسیل خطی دلخواهی را در نظر بگیرید، مثلا $L[x(t)]=0$. می‌خواهیم ببینم حل این معادله وقتی در معرض واداشتگی خارجی قرار می‌گیرد چیست، یعنی جواب معادله‌ی $L[x(t)]=f(t)$ را بیابیم. از آنجا که معادله خطی است، کافی است که جواب را به ازای «پایه‌هایی برای فضای توابع» بدانیم. ساده‌ترین نوع این توابع را می‌شود مجموعه‌ی توابع دلتا نامید. با این اوصاف این مساله را باید حل کنیم که اگر به دستگاهی که از معادله‌ی دیفرانسیل خطی‌مان پیروی می‌کند، ضربه‌ای بزنیم، این ضربه چگونه در زمان منتشر می‌شود. البته لزومی ندارد که پارامتر t لزوما زمان باشد، مثلا، همان‌طور که خواهیم دید، می‌شود پارامتر تابع مورد نظر از جنس پارامترهای مکانی باشد و سوال در واقع این باشد که اگر در نقطه‌ای چشمه قرار دهیم، تاثیر میدانش در نقاط مختلف چیست. به جوابی که مشخص می‌کند رفتار این جواب در زمان (یا مکان) چگونه منتشر می‌شود، انتشارگر می‌گویند. شاید این موضوع را با نام تابع گرین هم دیده باشید. برای روشن شدن مساله و همچنین برای این که مساله‌ی اصلی را جلو ببریم، مثال می‌زنیم.

نوسان‌گر هم‌آهنگ ساده

معادله‌ی نوسان‌گر هماهنگ ساده‌ی واداشته یک معادله‌ی حداکثر خطی است،

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\frac{f(t)}{m} \tag{8}$$

و می‌خواهیم به ازای تابع دلخواه f جواب را به دست آوریم. اگر جواب را به ازای تابع دلتای دیراک در زمان دلخواه بدانیم، از آنجا که معادله خطی است، با برهمنهی مناسب این جواب‌ها، تابع مورد نظرمان به دست می‌آید. پس بیایید ابتدا معادله‌ی

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right)G_A(t,t')=\delta(t-t') \tag{9}$$

را حل کنیم. جواب این معادله به نسبت ساده به دست می‌آید. یک راه تبدیل فوریه گرفتن است[۲و۳]. به دست می‌آید که

$$G_A(t,t')=\frac{\theta(t-t')\sin\omega(t-t')}{\omega} \tag{10}$$

که $\theta(t-t')$ تابع پله است که با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\theta(t-t')=\begin{cases}1 & t>t'\\ 0 & t<t'\end{cases} \tag{11}$$

به خاطر وجود این تابع پله، $x(t)$ تا پیش از اعمال ضربه صفر است و بعد از آن اثر ضربه در زمان منتشر می‌شود. به همین دلیل تابع دو نقطه‌ای $G_A(t,t')$ را انتشارگر پسینی می‌نامند، به عبارتی این تابع انتشار اثر ضربه‌ی وارد شده به نوسانگر در

زمان t' را در زمان‌های بعد از آن مشخص می‌کند. به عنوان یک حالت دیگر، می‌شد جای t و t' را در این جواب عوض کرد و انتشارگر پیشینی (که به خاطر علیت غیر فیزیکی است) را پیدا کرد.
بنابراین جواب معادله‌ی اصلی می‌شود:

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{m}\int_0^\infty dt' f(t') G_A(t,t') \quad \text{for} \quad t \geq 0 \tag{12}$$

که می‌گوید تابع f را به شکل تعداد بی‌شماری ضربه فرض کرده‌ایم و اثر منتشر شده‌ی ضربه‌ها را با هم جمع کرده‌ایم.
پس در نهایت نتیجه‌ی نهایی‌ای که به دست آورده‌ایم این است که جواب معادله‌ی (8) به ازای زمان‌های بزرگتر از صفر برابر است با:

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{m}\int_0^t dt' \frac{\sin\omega(t-t') f(t')}{\omega} \tag{13}$$

اما این روش فقط برای سیستم‌هایی که در زمان تحول می‌کنند نیست. مثال‌های فراوان دیگری می‌توان زد که در پایین به یکی دوتا از آن‌ها می‌پردازیم.

معادله‌ی پواسُن

به عنوان مثال دوم، معادله‌ی پواسُن را به عنوان معادله‌ی حداکثر خطی در نظر می‌گیریم. پتانسیل الکتریکی ناشی از چگالی بار الکتریکی ساکن در خلا با معادله‌ی پواسون داده می‌شود:

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \tag{14}$$

می‌دانیم که پاسخ این معادله، صرف نظر از جمله‌ی مرزی، عبارت است از

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\overrightarrow{x'})}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}-\vec{x}'\|}. \tag{15}$$

این جواب، همان جواب آشنایی است که در کتاب‌های الکترومغناطیس دیده‌ایم. به زبانی که ما در این جعبه گفته‌ایم، خواسته‌ایم پتانسیل را به ازای وجود بار فقط در یک نقطه به دست بیاوریم و بعد روی این جواب‌ها جمع بزنیم. یعنی اول معادله‌ی

$$\nabla^2 G = \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x'}) \tag{16}$$

را حل کرده‌ایم که جوابش می‌شود [۴]

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\vec{x}-\vec{x}'\|} \tag{17}$$

و با استفاده از این جواب تابع ϕ با به دست آوردیم. پیدا است که تابع دونقطه‌ای $(-4\pi\|\vec{x}-\vec{x}'\|)^{-1}$ انتشارگر معادله‌ی پواسن است.
معادله‌ی خطی دیگری هم وجود دارد که اندکی با معادله‌ی پواسن تفاوت دارد اما در ادامه‌ی بحث به دردمان می‌خورد. بگذارید به زبان الکتریسیته مساله را بیان کنیم که آشناتر است: پتانسیل الکتریکی ناشی از چگالی بار الکتریکی ساکن در محلولی مانند آب و نمک که یون‌های مثبت و منفی آزاد دارد، یا در پلاسمای رقیق با معادله‌ی زیر داده می‌شود:

$$(\nabla^2 - k_D^2)\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon}, \tag{18}$$

که k_D را عدد موج دیبای می‌نامند. این معادله را معادله‌ی دیبای بنامیم. این معادله را باز هم می‌شود با همین روشی که بیان کردیم جواب داد. کافی است که پتانسیل به وجود آمده به خاطر وجود یک بار نقطه‌ای را حساب کنیم، یا همان انتشارگر را. به راحتی می‌توانید ببینید که انتشارگر این معادله برابر است با

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-k_D\|\vec{x}-\vec{x}'\|}}{\|\vec{x}-\vec{x}'\|} \tag{19}$$

و در نتیجه جواب معادله‌ی دیبای می‌شود

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')e^{-k_D\|\vec{x}-\vec{x}'\|}}{4\pi\epsilon\|\vec{x}-\vec{x}'\|}. \quad (20)$$

سه انتشارگری که در این جعبه به دست آورده‌ایم در مقاله به دردمان خواهد خورد.

باز گردیم به مساله‌ی دو نوسان‌گر. با نتایجی که از جعبه به دست آوردیم می‌توانیم بنویسیم.

$$x_2^{(c)}(t) = -\frac{\kappa}{m_2}\int_0^t dt' G_A(t,t')x_1(t') \quad (21)$$

که تابع انتشارگر G_A را در جعبه‌ی بالا به دست آورده‌ایم. برای سادگی فرض کرده‌ایم که $x_2^{(c)}(0) = 0$ و $\dot{x_2}^{(c)}(0) = 0$. باید این جواب را در لاگرانژی (6) بگذاریم. در این لاگرانژی هم x_2 وجود دارد و هم $\dot{x}_2$. می‌شود کاری کرد که عملا نیاز به دانستن x_2 داشته باشیم و اثر صریح $\dot{x}_2$ را حذف کنیم. برای این کار، لاگرانژی (6) را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} L[x_1,x_2] = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) - \frac{m_2}{2}x_2(\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2) - \kappa x_1 x_2 \\ + \frac{d}{dt}\Big(\frac{m_2}{2}x_2\dot{x}_2\Big). \end{aligned} \quad (22)$$

شاید به نظر پیچیده‌تر بیاید، چون حالا سر و کله‌ی مشتق دوم x_2 هم پیدا شده. اما اگر توجه کنیم که پرانتزی که در آن $\ddot{x}_2$ پیدا شده به ازای معادله‌ی حرکت یعنی (7) فقط ضریبی از x_1 است، تا حدی خیالمان راحت می‌شود. از طرف دیگر، جمله‌ی آخر مشتق کامل است و می‌دانیم سهمی در معادله‌ی حرکت ندارد و می‌شود آن را دور انداخت. جدا از این، یک جمله‌ی دیگر می‌ماند که به x_2 وابسته است، آن هم ساده است: $-\kappa x_1 x_2$. دیگر کار تمام است و با جای‌گذاری $x_2^{(c)}(t)$ به جای x_2 در $L[x_1,x_2]$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} L^{(\text{eff})}[x_1] &:= L\Big[x_1, x_2^{(c)}(t)\Big] \\ &= \frac{m_1}{2}[\dot{x}_1(t)^2 - \omega_1^2 x_1(t)^2] \\ &- \frac{\kappa^2}{2m_2\omega_2}x_1(t)\int_0^t dt' \sin\omega_2(t-t')\, x_1(t') \end{aligned} \quad (23)$$

این «لاگرانژی موثر» رفتار ذره‌ی ۱ را در زمان‌های $t > 0$ بر حسب شرط‌های آغازین $x_1(0)$ و $\dot{x}_1(0)$ تعیین می‌کند.

اعتراضتان را به جان می‌خریم که احتمالا می‌گویید: «این که پیچیده‌تر شد! همان لاگرانژی دو ذره‌ای بهتر بود.» درست است. به همین دلیل هم هیچ‌گاه چنین مساله‌ای را به این روش حل نمی‌کنند. اما خوبی این مثال این است که جواب را از پیش می‌دانیم و می‌توانیم بررسی کنیم که روش تازه‌مان چگونه جواب‌های قبلی را بازتولید می‌کند. پس بیایید بپرسیم چه‌طوری می‌شود از لاگرانژی موثر $L^{(\text{eff})}[x_1]$ معادله‌ی حرکت x_1 را به دست آورد و آیا جواب معادله‌ی جدید با چیزهایی که از قبل می‌دانستیم یکی است یا نه. کنش موثری متناظر با لاگرانژی (23) را در نظر بگیرید

$$S \coloneqq \int dt\, L^{(\text{eff})}[x_1]$$
$$= \int dt\, \frac{m_1}{2}[\dot{x}_1(t)^2 - \omega_1^2 x_1(t)^2] \tag{24}$$
$$- \frac{\kappa^2}{2m_2\omega_2}\int dt\, x_1(t)\int_0^t dt' \sin\omega_2(t-t')\, x_1(t')\,.$$

معادله‌ی حرکت ذره‌ی یک با عبارت زیر داده می‌شود

$$\frac{\delta S}{\delta x_1(t_1)} = 0$$

یعنی باید معادله‌ی اویلر-لاگرانژ را بنویسیم. کمی صبر کنید می‌بینید که چرا مخصوصا زمان را با t_1 نشان داده‌ایم. جمله‌ی سخت برای وردش‌گیری جمله‌ای است که از انتشارگر آمده و درون خودش دو بار x_1 را قرار داده، یک بار در زمان t و بار دوم در زمان t' که روی آن هم انتگرال می‌گیریم. حالا باید هر جایی که $x(t_1)$ می‌بینیم، نسبت به آن مشتق بگیریم. ممکن است t برابر با t_1 شود و ممکن است t' برابر با t_1 شود. اگر به دقت این وردش را بگیریم به این نتیجه می‌رسیم که

$$\ddot{x}_1(t_1) + \omega_1^2\, x_1(t_1) = -\frac{\kappa^2}{2m_1m_2\omega_2}P(t_1) \tag{25}$$

که

$$P(t_1) \coloneqq \int_0^{t_1} dt' \sin\omega_2(t_1-t')\, x_1(t') - \int_{t_1}^{\infty} dt' \sin\omega_2(t_1-t')\, x_1(t') \tag{26}$$

فکر می‌کنیم دیگر می‌شود اندیس یک را با خیال راحت از زمان بیاندازیم. ببینیم از جواب به دست آمده چه انتظاری داشتیم. از حل اصلی مساله می‌دانستیم که حرکت جسم یک، ترکیب دو نوسان است، زیرا دو مد نوسانی مستقل داریم. بنابراین باید معادلات ناشی از روش جدید حل هم همین جواب‌ها را بدهد. معادله‌های بالا نسبت به x_1 خطی هستند که خبر خوبی است. اما در عبارت $P(t)$ هم x_1 وجود دارد و هم تابعی نوسانی از زمان. این باعث می‌شود که نوسان مربوط به x_1 تغییر کند که دقیقا چیزی است که ما می‌خواهیم به وجود بیاید. بگذارید این نکته را به صورت صریح نشان دهیم. خوب است اول تعبیری برای $P(t)$ ارایه کنیم. به نظر شما $P(t)$ چیست؟ اگر به معادله‌هایی که از لاگرانژی (6) به دست می‌آید نگاه کنیم نتیجه‌ی جالبی برای این سوال داریم: این کمیت متناسب با x_2 است. اما بیایید چشممان را روی این واقعیت ببندیم و فقط از معادله‌های (25) و (26) استفاده کنیم. از معادله‌ی (26) دو بار مشتق می‌گیریم و به دست می‌آید که:

$$\ddot{P}(t) \coloneqq -\omega_2^2 P(t) + 2\omega_2 x_1(t). \tag{27}$$

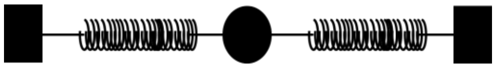
این معادله عملا معادله‌ی حاکم بر x_2 است. اما باز چشم‌پوشی می‌کنیم و این بار از معادله‌ی (26) دو بار مشتق می‌گیریم و در نهایت معلوم می‌شود که

$$\frac{d^4}{dt^4}x_1(t) + (\omega_1^2+\omega_2^2)\ddot{x}_1 + \left(\omega_1^2\omega_2^2 + \frac{\kappa^2}{m_1m_2}\right)x_1 = 0. \tag{28}$$

برای حل این معادله فرض می‌کنیم $x_1(t) = A\cos(\Omega t + \theta)$ و معلوم می‌شود که

$$\Omega^2 = \frac{1}{2}\left[\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2 + \frac{4\kappa^2}{m_1m_2}}\right]. \tag{29}$$

این جواب در خودش دقیقا دو بسامد مشخصه‌ی دستگاه اولیه را دارد. پس کنش موثری که به‌دست آورده‌ایم درست و دقیق است.



شکل ۱ طرح ساده از مساله‌ی سه جسم و دو فنر.

بگذارید مساله را یک گام پیچیده‌تر کنیم. مانند شکل (۱) دستگاهی شامل جرم‌های m_1، m و m_2 را در نظر بگیرید که به ترتیب با فنرهایی به سختی k_1 و k_2 به هم وصل شده‌اند. ما ذره‌ی میانی به جرم m را به عنوان ذره‌ی میانجی در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم توجه‌مان را معطوف به دو جسم چپ و راست کنیم، یعنی با حذف مختصه‌ی جرم وسط، لاگرانژی موثری برای حرکت دو جرم m_1 و m_2 به دست آوریم. لاگرانژی نخستین عبارت است از

$$L[x_1,x,x_2]=\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{x}_2^2}{2}+\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{k_1(x-x_1)^2}{2}-\frac{k_2(x-x_2)^2}{2}, \tag{30}$$

که با توجه به تجربه‌ای که در مساله‌ی پیش به دست آورده‌ایم، آن را به این صورت می‌نویسیم

$$L[x_1,x,x_2]=\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{x}_2^2}{2}-\frac{mx\ddot{x}}{2}-\frac{k_1(x-x_1)^2}{2}-\frac{k_2(x-x_2)^2}{2}+\frac{d}{dt}\left(\frac{mx\dot{x}}{2}\right). \tag{31}$$

برای رسیدن به هدفمان باید معادله‌ی حرکت جرم میانی را به دست بیاوریم. خوشبختانه مساله را هنوز ساده انتخاب کرده‌ایم و معادله‌ی حاکم بر x خطی است:

$$m\ddot{x}=-(k_1+k_2)x+(k_1x_1+k_2x_2), \tag{32}$$

و راحت می‌شود حل‌اش کرد. اما فعلا به حلش کاری نداریم. کاری که الان باید بکنیم این است با استفاده از این معادله، $\ddot{x}$ را در لاگرانژی (31) جای‌گذاری کنیم. طبیعتا از جمله‌ی $\frac{d}{dt}\left(\frac{mx\dot{x}}{2}\right)$ هم به دلیل مشتق کامل بودن چشم‌پوشی می‌کنیم و در نهایت به لاگرانژی موثر می‌رسیم:

$$L^{(\mathrm{eff})}[x_1,x_2]\coloneqq L\left[x_1,x^{(c)}(t),x_2\right]=\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{x}_2^2}{2}-V^{(\mathrm{eff})}[x_1,x_2;t] \tag{33}$$

که

$$V^{(\mathrm{eff})}[x_1,x_2;t]\coloneqq \frac{k_1x_1^2}{2}+\frac{k_2x_2^2}{2}-\frac{x^{(c)}(t)}{2}(k_1x_1+k_2x_2). \tag{34}$$

در این پتانسیل موثر، $x^{(c)}(t)$ پاسخ معادله‌ی حرکت x است که خوشبختانه می‌توانیم حل‌اش کنیم، حتی با ندانستن x_1 و x_2. این حل را با استفاده از فوت و فن انتشارگر حساب می‌کنیم. با فرض $x_0=(0)x^{(c)}$ و $0=(0)\dot{x}^{(c)}$ به دست می‌آید:

$$x^{(c)}(t) = x_0 + \frac{1}{\sqrt{m(k_1+k_2)}} \int_0^t dt' \sin\left[\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}(t-t')\right]\left(k_1 x_1(t') + k_2 x_2(t')\right). \quad (35)$$

خب، این مساله حل شد و لاگرانژی موثر به دست آمد، ولی اصل کار تحلیل این حل است. برای سادگی بیایید فرض کنیم $k := k_1 = k_2$ و $m = m_1 = m_2$. اگر حل مساله به روش معمول را در خاطر داشته باشید، این دستگاه سه مد نوسانی دارد. البته یکی که اصولا نوسانی نیست و حرکت مرکزجرم با سرعت ثابت روی خط راست است. اگر در دستگاه مرکز جرم بنشینیم، دو مد نوسانی در این دستگاه وجود دارد. یکی این که دو جسم چپ و راست مخالف هم حرکت کنند و جسم وسط تکان نخورد، و دومی این‌که هر دو مانند هم نوسان کنند و جسم وسط کاملا خلاف هم‌فاز با این دو و با دامنه‌ی نوسانی دو برابر حرکت کند. به عبارتی جواب‌ها به ترتیب این‌ها هستند: یکی $x_1^{(c_1)}(t) + x_2^{(c_1)}(t) = x^{(c_1)}(t) = 0$ و دیگری $x_1^{(c_2)}(t) = x_2^{(c_2)}(t) = -\frac{1}{2}x^{(c_2)}(t)$. تاکید می‌کنیم که در هر دو پاسخ، مرکز جرم دست‌گاه ساکن است. پس، نوسان هر کدام از اجسام کناری مانند حرکت دو جرم و فنر یک‌سان و مستقل به جرم m ولی به سختی فنر k و $3k$ باشد، البته نه کاملا مستقل که باید یا کاملا هم‌فاز حرکت کنند یا کاملا خلاف هم‌فاز.

حالا به پتانسیل موثر $V^{(\text{eff})}[x_1, x_2; t]$ نگاه کنید. ببینیم در حالت‌هایی دو جسم هم‌فاز یا کاملا خلاف هم‌فاز هستند چه اتفاقی می‌افتد. اگر کاملا خلاف هم‌فاز باشند، یعنی $x_1 + x_2 = 0$، پتانسیل موثر بسیار ساده می‌شود و نتیجه می‌دهد که هر دو جسم با بسامد $\omega = \sqrt{k/m}$ نوسان می‌کنند. درست همانی که انتظار داشتیم. در حالتی که $x^{(c)} = 0$ به راحتی پتانسیل موثر به خوبی وضعیت نخستین را نشان می‌دهد. البته باید دقت کنیم که در این وضعیت $x_0 = 0$.

بررسی وضعیت دوم کمی دشوارتر است، اما چند روش برای فهمیدن آن می‌توان به کار برد. هدف‌مان این است که بسامد معادل $\omega^2 = 3k/m$ را در این راه حل پیدا کنیم. به عنوان یکی از روش‌های ممکن بیایید در انتگرال‌دهِ سمت راستِ رابطه‌ای که برای $x^{(c)}(t)$ نوشته‌ایم (معادله‌ی (35) به ازای پارامترهای ساده شده)، به جای $x_1(t') + x_2(t')$ بگذاریم $-x^{(c)}(t')$. آن‌گاه به معادله‌ی انتگرالی زیر می‌رسیم:

$$x^{(c)}(t) = x_0 - \sqrt{\frac{k}{2m}} \int_0^t dt' \sin\left[\sqrt{\frac{2k}{m}}(t-t')\right] x^{(c)}(t'). \quad (36)$$

به آسانی و با مشتق‌گیری‌هایی سرراست می‌توان دید که این معادله، هم‌ارز معادله‌ی

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{3k}{m}\right) x^{(c)}(t) = \frac{2k}{m} x_0 \quad (37)$$

با شرط آغازین $x^{(c)}(0) = x_0$ و $\dot{x}^{(c)}(0) = 0$ است. پس همان‌طور که انتظار داشتیم بسامد نوسان $x_1^{(c_2)}(t)$ و $x_2^{(c_2)}(t)$ مساوی $\sqrt{\frac{3k}{m}}$ است.

راه دیگر استفاده از این واقعیت است که مرکز جرم را ساکن گرفته‌ایم. بنابراین با توجه به یکسان بودن جرم‌ها باید رابطه‌ی $x + x_1 + x_2 = 0$ همواره برقرار باشد. از سویی حالتی را در نظر گرفته‌ایم که دو جسم کناری هم‌فاز هستند، بنابراین به

ازای این شرط همیشه داریم $x_1^{(c_2)}(t) = x_2^{(c_2)}(t) = -\frac{1}{2}x^{(c_2)}(t)$. حالا به شکل رابطه‌ی پتانسیل موثر نگاه کنید، یعنی رابطه‌ی (34). این رابطه را به این صورت باز نویسی می‌کنم:

$$V^{(\text{eff})}[x_1, x_2; t] \coloneqq \frac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 - x^{(c_2)}(t)x_1 - x^{(c_2)}(t)x_2\right) \tag{38}$$

و به جای $x^{(c_2)}$ی اول می‌گذاریم $2x_1$ و به جای x^cی دوم می‌گذاریم $2x_2$. در این صورت به ازای حالت هم‌فاز، تاکید می‌کنیم فقط حالت همفاز، عملا پتانسیل موثر تبدیل می‌شود به:

$$V^{(\text{eff})}[x_1, x_2; t] = \frac{3k}{2}\left(x_1^{(c_2)}(t)^2 + x_2^{(c_2)}(t)^2\right) \tag{39}$$

که یعنی هر کدام با بسامد $\omega = \sqrt{3k/m}$ نوسان می‌کنند. دقت کنید که برای این که بگوییم فقط در حالت هم‌فاز این پتانسیل درست است، نشانه‌ی c_2 را صریحا آورده‌ایم.

۴ کنش موثر نیروی الکترومغناطیس

به عنوان کاربرد جذاب، بازمی‌گردیم به مساله‌ی اولیه‌مان که کنش الکترومغناطیس بود. مثال‌هایی که تا حالا زده‌ایم، واقعا کاربرد روش کنش موثر نبودند، به این معنی که حل مساله به شیوه‌های دیگر هم آسان‌تر بود و هم تصویر مفهومی بهتری داشت. به یاد بیاورید که هر بار سعی می‌کردیم حل از راه جدید را بر تصویری که از پیش داشتیم، منطبق کنیم. اما مثال‌هایی که در این بخش می‌زنیم از نوع دیگری است. اگرچه این بار هم جواب را خوب می‌شناسیم، اما این که جواب شناخته‌شده از قبل، در اصل از کنش موثر به دست آمده، تصویری زیباتر و جذاب‌تر می‌دهد.

کنش الکترومغناطیس به صورت کامل با رابطه‌ی (1) داده می‌شود. اما در این نوشتار نمی‌خواهیم مساله را به صورت دینامیک بررسی کنیم. بررسی حالت دینامیک پیچیده‌تر است و برای همین حالت الکترواستاتیک را در نظر می‌گیریم. در این صورت لاگرانژی میدان الکتریکی تنها بر حسب میدان اسکالر ϕ نوشته می‌شود. به این ترتیب می‌توان لاگرانژی را سه بخش کرد: قسمت الکترواستاتیک که با L_E نشان می‌دهیم، قسمت ماده که با L_{matter} نشان می‌دهیم و بخش برهمکنش که با L_{int} نشان می‌دهیم. پس:

$$L_E = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi\right) \tag{40}$$

و

$$L_{\text{int}} = -\int d^3x\, \rho\phi \tag{41}$$

که در آن ρ چگالی ماده است. دقت کنید که کنش را در واحدهایی نوشته‌ایم که نیازی به گذاشتن ϵ_0 نیست. کنش مربوط به ماده می‌تواند شکل‌های مختلفی داشته باشد. ساده‌ترین حالت این است که فقط انرژی جنبشی ماده را در خود داشته باشد و به ماده نیرویی به جز همین نیرویی که میدان الکتریکی وارد می‌کند، اعمال نشود. اما مساله‌ی ما کنش اولیه‌ی ماده نیست. می‌خواهیم با نوشتن حل معادله‌ی مربوط به پتانسیل الکتریکی، ϕ، عملا این کمیت را از معادله‌ی بالا حذف کنیم و کنش موثری بنویسیم که فقط ماده در آن وجود دارد. این کار را در بخش قبل به خوبی فرا گرفته‌ایم.

به این ترتیب، لاگرانژی کل برابر است با:

$$L_{\text{Total}} = L_{\text{matter}} + \int d^3x\ \left(\frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi - \rho\phi\right) \tag{42}$$

معادله‌ی حرکت به دست آمده برای ϕ همان معادله‌ی پواسن است. بنابراین با استفاده از انتشارگر معادله‌ی پواسن، به ازای چگالی بار دلخواه جوابش را داریم: معادله‌ی (15). فوت و فنی مانند آنچه در مساله‌ی فنر انجام دادیم را پی می‌گیریم. اتحاد $\nabla\phi \cdot \nabla\phi = \nabla \cdot (\phi\nabla\phi) - \phi\nabla^2\phi$، با به کار می‌گیریم و با استفاده از قضیه‌ی گوس و چشم‌پوشی از جمله‌ی مرزی، جمله‌ی واگرایی کامل را کنار می‌گذاریم. می‌ماند جمله‌ی متناسب با $\nabla^2\phi$. از معادله‌ی حرکت می‌دانیم که لاپلاسی پتانسیل برابر است با $-\rho\phi$ و در نتیجه کنش موثر ساده می‌شود:

$$L_{\text{matter}}^{(\text{eff})} = L_{\text{matter}} - \frac{1}{2}\int d^3x\ \rho\phi \tag{43}$$

حالا وقتش است که از رابطه‌ی (15) استفاده کنیم و کلا ϕ را از کنش موثر حذف کنیم. به این ترتیب:

$$L_{\text{matter}}^{(\text{eff})} = L_{\text{matter}} - V \tag{44}$$

که

$$V \coloneqq \int d^3x \int d^3x'\, \frac{\rho(\vec{x})\rho\left(\overrightarrow{x'}\right)}{8\pi\epsilon_0||\vec{x} - \vec{x}'||}. \tag{45}$$

این جمله بسیار آشناست. از الکترومغناطیس می‌دانیم که این جمله خودانرژی توزیع بار است و همواره مثبت. نتیجه درخشان است! نظریه‌ی اولیه‌ای که بررسی می‌کردیم هم شامل ماده بود و هم پتانسیل الکتریکی. بعد با حل مساله‌ی مربوط به پتانسیل الکتریکی، کنشی به دست آوردیم که فقط شامل خواص ماده است و دیگر میدان الکتریکی سهمی در آن ندارد. یعنی الان می‌توانیم فکر کنیم که میدان الکتریکی اصولا وجود ندارد و نیروی الکتریکی به صورت کنش از دور منتقل می‌شود. اگر جور دیگر بخواهیم بگوییم این طور می‌توانیم بیان کنیم که شیوه‌ی اعمال نیرو را از شکل ماده–میدان الکتریکی–ماده، تبدیل کرده‌ایم به شکل ماده–ماده. اگر مساله را می‌شد با شیوه‌ای ساده به حالت دینامیک تبدیل کرد، می‌دیدیم که قاعدتا هم نیرو الکتریکی و هم مغناطیسی را می‌شود به صورت کنش از دور بین بارها به دست آورد (البته احتمالا به تقریب). در نظریه‌ی میدان کوانتمی کنش میدان‌های الکترومغناطیسی تعبیر به وجود ذراتی به نام فوتون می‌شود. این محاسبه‌های کلاسیک که ما انجام دادیم، در آن نظریه به این شکل می‌تواند معنی شود که به شکلی حل معادله‌های میدان‌های الکترومعناطیسی را حذف می‌کنیم و به کنش موثر بین بارها می‌رسیم. واقعا این کار را هم می‌کنند، اما کنشی که نیروی کولنی را بدهد، یعنی چیزی شبیه کنش بالا، فقط در حد انرژی‌های پایین ظاهر می‌شود.

حالا که کنش موثر بین بارهای الکتریکی را به دست آورده‌ایم، بیایید ببینیم برهمکنش دو بار نقطه‌ای چه می‌شود. اگر دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در نقاط $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ واقع باشند، یعنی چگالی بار برابر باشد با

$$\rho(\vec{x}) = q_1\delta^3(\vec{x} - \vec{a}_1) + q_2\delta^3(\vec{x} - \vec{a}_2) \tag{46}$$

در این صورت خود انرژی این توزیع بار برابر می‌شود با

$$V \coloneqq \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0||\vec{a}_1 - \vec{a}_2||} + \mathcal{E}(q_1) + \mathcal{E}(q_2) \tag{47}$$

که $\mathcal{E}(q)$ نماینده‌ی خودانرژی بار نقطه‌ای q است و به ازای بار نقطه‌ای بینهایت. اما این دو بینهایت کاری با ما ندارند. از آنجا که فقط احتمالا جای بارها تغییر می‌کند، تنها جمله‌ی نخست در این پتانسیل می‌تواند نقش بازی کند. این جمله همان پتانسیل کولنی است و به روشنی نیروی بین دو بار همنام دافعه و نیروی بین دو بار ناهم‌نام جاذبه است.

نکته‌ی جذاب این می‌تواند باشد که آیا می‌توان کنش خطی دیگری نوشت که نتیجه‌ی نهایی آن این باشد که بارهای همنام همدیگر را جذب کنند. در بخش بعد چنین مثالی می‌زنیم.

۵ کنش موثر پایون‌ها، شکل ساده شده‌ی نیروی هسته‌ای

اگر چه در چارچوب نظریه‌ی استاندارد ذرات بنیادی، برهمکنش هسته‌ای با کرومودینامیک کوانتمی داده می‌شود، اما نظریه‌های ساده‌تری وجود دارند که تا حد خوبی می‌توانند این برهمکنش را توصیف کنند. می‌توانیم باز به این صورت بخواهیم نگاه کنیم که دو ذره‌ای که بار هسته‌ای دارند، پتانسیلی بین هم برقرار می‌کنند. به تقریب، این پتانسیل همان پتانسیل یوکاواست، یعنی پتانسیل بین دو ذره با بار هسته‌ای که در فاصله‌ی r از هم قرار دارند متناسب است با [۱]

$$\frac{\exp(-\mu r)}{r} \tag{48}$$

که μ کمیتی مثبت است. سوالی می‌شود پرسید این است که آیا این پتانسیل را می‌شود با سازوکاری که آموخته‌ایم به دست آوریم. یعنی کنشی برای میدان پتانسیلی‌ای مشخص بنویسیم و بین ذرات و این میدان پتانسیلی برهمکنش بگذاریم. در نهایت با حذف میدان پتانسیل، کنش موثر و در نتیجه پتانسیل موثر بین ذرات هسته‌ای را به دست آوریم.

نظریه‌ای که چنین خاصیتی دارد، استفاده از میدان پایون‌ها به عنوان ذره‌ی تبادلی است. شاید اگر لاگرانژی را بنویسیم، منظورمان واضح‌تر شود. مانند مثال‌های گذشته، لاگرانژی را سه بخش می‌کنیم. یکی لاگرانژی پایون‌ها، یکی لاگرانژی ماده L_N، و دست آخر لاگرانژی برهمکنش L_{int}. لاگرانژی پایون‌ها برابر است با

$$L_p = -\frac{1}{2}\int d^3x \left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + k_\pi^2\phi^2\right) \tag{49}$$

که میدان نرده‌ای ϕ نماینده‌ی پایون‌هاست و k_π هم عدد موج کامپتون پایون است و متناسب با جرم آن. علاوه بر این داریم $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ که اندیس μ می‌تواند صفر، یک، دو یا سه باشد که صفر مختصه‌ی زمانی و بقیه‌ی مختصات هم مکانی هستند. متریک با هم با نشانگان $(-,+,+,+)$ گرفته‌ایم، یعنی داریم:

$$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + (\nabla\phi)^2 \tag{50}$$

احتمالا اولین اعتراضی که بکنید این است که در مساله‌ی قبل، مساله را استاتیک گرفتید اما در این یکی دینامیک. فکر می‌کنیم که اعتراض شما به جا نیست! چون در مساله‌ی قبل هم ابتدا لاگرانژی کامل الکترومغناطیس را نوشتیم که هم پتانسیل نرده‌ای داشت و هم پتانسیل برداری. اما به دلیل این که مساله‌ی الکترواستاتیک جذاب‌تر بود، تبدیلش کردیم به مساله‌ی استاتیک. در این جا هم همین کار را داریم می‌کنیم. ابتدا مساله‌ی دینامیک را معرفی کرده‌ایم اما در نهایت خودمان را محدود می‌کنیم به مساله‌ی استاتیک. البته این مساله در حالت دینامیک ساده‌تر از الکترومغناطیس در حالت دینامیک است و برای همین تا مدتی

همچنان مساله را به شکل دینامیک جلو می‌بریم. در آخر هم سعی می‌کنیم واقعا مساله را در حالت دینامیک بررسی کنیم تا ببینیم می‌شود ایده‌ی کنش موثر را در این حالت به کار ببریم.

غیر از لاگرانژی میدان، نیاز است که لاگرانژی برهمکنش را هم معرفی کنیم.

$$L_{\text{int}} \coloneqq -g \int d^3x\, \phi \rho_N. \tag{51}$$

چگالی ماده‌ی باریونی، یعنی ماده‌ای که برهمکنش هسته‌ای دارد را با ρ_N نشان داده‌ایم و g هم ثابت جفت‌شدگی بین ماده‌ی باریونی و میدانی پایونی است. درنهایت هم دینامیک این ماده‌ی باریونی با لاگرانژی L_N داده می‌شود که فعلا چندان نیازی به دانستن جزییات آن نداریم. باز هم این لاگرانژی شامل انرژی جنبشی ذرات باریونی است و احتمالا برهمکنش‌های دیگری که با هم دارند.

بگذارید قدم‌های بعدی را یک بار سریع مرور کنیم: ابتدا باید معادله‌ی حرکت میدان نرده‌ای را به دست آوریم، بعد در لاگرانژی، احتمالا با یک انتگرال‌گیری پاره‌ای، به بخشی از این معادله‌ی حرکت برسیم و جایگذاری کنیم. از آن طرف باید معادله‌ی انتشارگر را حساب کنیم و در نهایت با قرار دادن این جواب در لاگرانژی، میدان ϕ را حذف کنیم تا لاگرانژی موثری فقط بر حسب چگالی ماده‌ی باریونی به دست آوریم.

پس گام اول به دست آوردن معادله‌ی حرکت میدان نرده‌ای است:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta L}{\delta[\partial_t \phi(x)]} - \frac{\delta L}{\delta \phi(x)} = 0 \tag{52}$$

که نتیجه‌ی آن معادله‌ی کلین-گوردون با چشمه‌ی $g\rho_N$ منجر می‌شود:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - k_\pi^2\right)\phi = g\rho_N. \tag{53}$$

حالا نوبت انتگرال‌گیری پاره‌ای است. با این کار یکی از مشتق‌های جمله‌ی $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ را از روی یکی از میدان‌ها برمی‌داریم و روی میدان دومی می‌گذاریم و لاگرانژی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$L = \frac{1}{2}\int d^3x\, \partial_\mu(\phi \partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}\int d^3x\, \left(\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi - k_\pi^2 \phi^2\right) + L_{\text{int}} + L_N \tag{54}$$

جمله‌ی نخست ترکیبی از یک جمله‌ی مشتق کامل نسبت به زمان و یک جمله‌ی مرزی (با توجه به قضیه‌ی گوس) است چرا که

$$\partial_\mu(\phi \partial^\mu \phi) = -\partial_0(\phi \partial_0 \phi) + \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) \tag{55}$$

و در نتیجه می‌توان کلا از آن چشم‌پوشید. حالا وقت آن است که از معادله‌ی حرکت استفاده کنیم و کنش بالا را ساده کنیم. از آنجا که محاسبه‌ها بسیار شبیه آن چیزی است که پیشتر انجام داده‌ایم یکراست نتیجه را می‌نویسیم:

$$L_N^{\text{eff}} = L_N - V \tag{56}$$

که $V \coloneqq -\frac{1}{2} L_{\text{int}}$.

حالا باید انتشارگر را حساب کنیم. این‌جاست که مساله را استاتیک می‌کنیم تا از انتشارگری استفاده کنیم که در جعبه‌ی انتشارگر به دست آوردیم، یعنی معادله‌ی (20). در حالت استاتیک، معادله‌ی حرکت تبدیل می‌شود به:

$$(\nabla^2 - k_\pi^2)\phi = g\rho_N$$

که یادگرفته‌ایم که جوابش این است

$$\phi(\vec{x}) = -g \int d^3x' \frac{\rho_N(\vec{x}')e^{-k_\pi \|\vec{x}-\vec{x}'\|}}{4\pi\|\vec{x}-\vec{x}'\|} \tag{57}$$

به این ترتیب پتانسیل موثر بین ذرات باریونی به دست می‌آید

$$V = -g^2 \int d^3x \int d^3x' \frac{\rho_N(\vec{x})\rho_N(\vec{x}')e^{-k_\pi \|\vec{x}-\vec{x}'\|}}{8\pi\|\vec{x}-\vec{x}'\|}. \tag{58}$$

وقتش است که نتیجه‌ی به دست آمده را تحلیل کنیم. شاید بهتر باشد پتانسیل مربوط به برهمکنش دو ذره که بار هسته‌ای دارند را به دست آوریم تا تحلیل ساده‌تر باشد. پس چگالی بار را می‌گیرید دو تابع دلتای دیراک در دو نقطه‌ی مختلف:

$$\rho(\vec{x}) = N_1\delta^3(\vec{x} - \vec{a}_1) + N_2\delta^3(\vec{x} - \vec{a}_2) \tag{59}$$

به این ترتیب بار N_1 در نقطه‌ی $\vec{a}_1$ قرار دارد و بار N_2 در نقطه‌ی $\vec{a}_2$. اگر این تابع چگالی را در پتانسیل به دست آمده قرار دهیم به دست می‌آید که

$$V_{N_1N_2} = -\frac{g^2N_1N_2e^{-k_\pi r}}{4\pi r} + \mathcal{E}(N_1) + \mathcal{E}(N_2) \tag{60}$$

که $\mathcal{E}(N_i)$ خودانرژی بار N_i است و $r = \|\vec{a}_1 - \vec{a}_2\|$. پس پتانسیل بین دو بار هسته‌ای از جنس پتانسیل یوکاوا است و همچنین علامت منفی نشان می‌دهد که بارهای هم‌علامت یکدیگر را جذب می‌کنند، درست برعکس حالت بارهای الکتریکی.

احتمالا می‌پرسید که این تفاوت از کجا آمد. رد تفاوت این علامت را می‌توان تا آنجا عقب برد که در کنش ماکسول ضریب کنار $(\nabla\phi)^2$ مثبت است اما در لاگرانژی‌ای که برای پایون‌ها نوشته‌ایم علامت آن منفی است. اگر فقط مساله‌ی استاتیک را در نظر بگیریم می‌توانیم استدلال کنیم که اگر از اول علامت را یکسان انتخاب می‌کردیم این دو مساله مشابه هم در می‌آمدند. اما قسمت‌های استاتیک، بخشی از لاگرانژی اصلی هستند و در لاگرانژی اصلی نیاز داریم که جمله‌ای که جای انرژی جنبشی می‌نشیند مثبت باشد. در مساله‌ی الکترومغناطیس، ϕ تنها یک مولفه از بردار پتانسیل الکترومغناطیسی است و برای جور شدن همه چیز ناچاریم انتخاب کنیم که علامت $(\nabla\phi)^2$ مثبت باشد. اما در مساله‌ی پایون، که ϕ واقعا یک پتانسیل نرده‌ای است، علامت جمله‌ی $(\nabla\phi)^2$ برعکس علامت $\dot{\phi}^2$ در می‌آید و چون مشتق زمانی ϕ نشان از انرژی جنبشی است، باید مثبت باشد و دیگری منفی. با این حساب مشخص است که در الکترومغناطیس باید بارهای هم‌علامت یکدیگر را دفع کنند و در نیروی هسته‌ای باید جذب کنند.

همان طور که پیشتر گفتیم، مساله‌ی پتانسیل نرده‌ای پیچیدگی کمتری دارد و راحت‌تر می‌شود حالت دینامیکش را بررسی کرد. حقیقتش با این که به دقت می‌شود این حالت را بررسی کرد، ولی ترجیح می‌دهیم محاسبه‌ها را تقریبی جلو ببریم تا مفهوم‌های قابل لمس‌تری به دست بیاوریم. مثلا در این مورد خاص، می‌خواهیم ببینیم که وجود برهمکنش از جنس هسته‌ای، به طور موثر می‌تواند موج‌هایی در چگالی ذرات باریونی درست کند که با سرعت نور جابجا می‌شوند. به این منظور حد انرژی‌های کم و چگالی‌های به نسبت یکنواخت را در نظر خواهیم گرفت.

برای در نظر گرفتن چنین حدی، باید فرض کنیم که افت و خیزهای سیستم کم است، یعنی در تبدیل فوریه‌ی چگالی ماده، تقریبا فقط مدهای با طول موج بلند باید حاضر باشند. پس بیایید مساله را در فضای فوریه بررسی کنیم. یعنی هم میدان نرده‌ای ϕ و هم چگالی ماده‌ی باریونی، ρ_N، را بسط فوریه بدهیم. از آنجا که مساله خطی است، و در نتیجه لاگرانژی‌ها از مرتبه‌ی دوم میدان‌ها هستند، به راحتی این تبدیل را می‌شود در لاگرانژی اعمال کرد. چیزی که در رابطه‌ی (56) به دست آورده‌ایم این است که کنش موثر در حالت کلی که وابستگی زمانی را دور نریخته بودیم به صورت

$$S^{\text{eff}} = \int dt\, L_N + \frac{1}{2} S_{\text{int}} \tag{61}$$

که

$$S_{\text{int}} = -g \int d^4x\, \phi(x)\rho_N(x) \tag{62}$$

که $x \coloneqq (t, \vec{x})$ چاربردار مکان است و المان انتگرال‌گیری به این صورت تعریف شده: $d^4x \coloneqq dt\, d^3x$. دقت کنید که واحدها را طوری انتخاب کرده‌ایم که سرعت نور واحد شود. همین کنش برهمکنش را می‌شود بر حسب مدهای فوریه نوشت

$$S_{\text{int}} = -g \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(p)\tilde{\rho}_N(-p) \tag{63}$$

دقت کنید که در هر دو بخش فضایی و زمانی تبدیل فوریه زده‌ایم، یعنی $\tilde{\phi}(p) \coloneqq \int d^4x\, e^{-ip\cdot x}\phi(x)$، و داریم

$$p \coloneqq (E, \vec{p}) \tag{64}$$

و تعبیر p چاربردار تکانه است. یعنی $\tilde{\phi}(p)$ نشان‌دهنده‌ی میدان پایونی با چارتکانه‌ی p است. همچنین ضرب داخلی با استفاده از متریک ساده‌ی میکوفسکی تعریف شده: $p \cdot x = \eta_{\mu\nu} p^\mu x^\nu$. از آنجا که کنش اصلی تقارن انتقالی دارد، اصولا حل آن در فضای فوریه سرراست‌تر است. در واقع معادله‌ی حرکت هر کدام از مدهای فوریه از بقیه واجفتیده می‌شود و انتشارگر در این فضا بسیار ساده‌تر می‌شود. معادله‌ی حرکت در فضای فوریه می‌شود

$$(p \cdot p + k_\pi^2)\tilde{\phi}(p) = -g\tilde{\rho}_N(p) \tag{65}$$

که انتشارگر $\tilde{G} = -(p.p + k_\pi^2)$ را نتیجه می‌دهد. با داشتن انتشارگر می‌شود کنش موثر را فقط بر حسب چگالی ماده نوشت. یعنی در معادله‌ی (61) باید بنویسیم

$$S_{\text{int}} = g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\rho}_N(p)\tilde{\rho}_N(-p)}{p \cdot p + k_\pi^2}$$

حل مساله این جا کامل شده، اما تعبیر کردن معادله‌ی بالا در حالت‌های خاص بسیار جذاب‌تر است. می‌خواهیم وقتی که میدان چگالی به نسبت هموار است به آن نگاه کنیم. یعنی وقتی که $\tilde{\rho}_N(p)$ تنها در همسایگی $p = 0$ ناصفر باشد. در این صورت فقط سهم نزدیک مبدا این انتگرال مهم است و در جاهایی دور از مبدا سهم انتگرال‌ده ناچیز است. برای همین می‌شود از جمله‌ی $p \cdot p$ در مخرج چشم پوشید مساله بسیار ساده می‌شود

$$S_{\text{int}} \simeq \frac{g^2}{k_\pi^2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\rho}_N(p)\tilde{\rho}_N(-p) = \frac{g^2}{k_\pi^2} \int dt \int d^3x\, \rho_N(x)\rho_N(x) \tag{66}$$

اگر بخواهیم از این جمله تعبیر پتانسیل بکنیم باید بگوییم که پتانسیلی که ماده به صورت موثر در آن قرار دارد برابر است با :

$$U := -\frac{g^2}{2k_\pi^2}\int d^3x\, \rho_N(x)^2 \tag{67}$$

که یک پتانسیل جاذبه‌ای است. یعنی اگر توده‌ای از موادی با برهمکنش هسته‌ای داشته باشیم، به اندازه‌ی بالا انرژی در درونشان ذخیره شده. اما اگر ρ به مکان وابسته باشد، یعنی که فقط چارتکانه‌ی دقیقا صفر را نداریم. پس بیایید کنش موثری که پیشتر به دست آوردیم را بر حسب p تا اولین مرتبه بسط دهیم. برای این کار لازم است که انتشارگر را بسط دهیم

$$\frac{1}{p\cdot p + k_\pi^2} \simeq \frac{1}{k_\pi^2} - \frac{p\cdot p}{k_\pi^4} \tag{68}$$

و در نتیجه کنش موثر تقریبا برابر می‌شود با

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} &\simeq \frac{g^2}{k_\pi^2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{\rho}_N(p)\tilde{\rho}_N(-p)\left(1-\frac{p\cdot p}{k_\pi^2}\right) \\ &= \frac{g^2}{k_\pi^2}\int d^4x\left(\rho(x)^2 - k_\pi^{-2}\,\partial_\mu\rho(x)\partial^\mu\rho(x)\right) \end{aligned} \tag{69}$$

جمله‌ی جدیدی که در کنش موثر ظاهر شد، کنش حرکت یک موج با سرعت نور است. به این معنی به دست آورده‌ایم که اختلال‌های چگالی با سرعت نور، آن هم به خاطر برهمکنش با پایون، منتشر می‌شوند.

برای پایان دادن به بحث نکته‌ای که شاید جذاب به نظر برسد را به این محاسبه‌ها اضافه می‌کنیم: این که می‌شود از کنش موثر در حالت استاتیک، یعنی معادله‌ی (58) ، کنشی مانند آن‌چه این جا به دست آوردیم درست کرد. در حالت استاتیک فرض کرده بودیم که $\partial_0\rho(x) = 0$. پس بیایید با این شرایط معادله‌ی (69) باز نویسی کنیم:

$$S_{\text{int}} = -\frac{g^2}{2k_\pi^2}\int d^3x(\rho(\vec{x})^2 - k_\pi^{-2}\,\nabla\rho(\vec{x})\cdot\nabla\rho(\vec{x}) + \cdots) \tag{70}$$

چیزی که می‌خواهیم نشان دهیم این است که پتانسیل به دست آمده در رابطه‌ی (58) در حد افت‌وخیزهای با طول موج بزرگ به همین نتیجه منجر می‌شود. از آنجا که محاسبه‌ها سرراست اما طولانی است، و احتمالا تا اینجای کار هم شما را خسته کرده‌ایم. سعی می‌کنیم خیلی خلاصه، پیچ و خم‌های محاسبه را ذکر کنیم و محاسبه‌ی دقیق را بر عهده‌ی خواننده‌ای که علاقه‌مند به این جور محاسبه‌ها است بگذاریم.

برای رسیدن به هدف‌مان باید به شکلی از دست تابع گرین، یا دست‌کم شکلی از آن که در معادله‌ی (58) می‌بینیم خلاص شویم. برای این کار از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{e^{-k_\pi\|\vec{x}-\vec{x'}\|}}{8\pi\|\vec{x}-\vec{x'}\|} = \frac{\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})}{2k_\pi^2} + k_\pi^{-2}\nabla^2\left(\frac{e^{-k_\pi\|\vec{x}-\vec{x'}\|}}{8\pi\|\vec{x}-\vec{x'}\|}\right) \tag{71}$$

و آن را در پتانسیل (58) به کار می‌گیریم. جمله اول، عبارتی متناسب با $\rho(\vec{x})^2$ را می‌دهد و جمله‌ی دوم با دوبار انتگرال‌گیری پاره‌ای و چشم‌پوشی از جمله‌های مرزی، مشتق دوم از حاصل ضرب چگالی‌ها را تولید می‌کند، چیزی شبیه به عبارت

$$\frac{1}{k_\pi^2}\int d^3x\int d^3x'\,\nabla\rho(\vec{x})\cdot\nabla'\rho(\vec{x'})\left(\frac{e^{-k_\pi\|\vec{x}-\vec{x'}\|}}{8\pi\|\vec{x}-\vec{x'}\|}\right) \tag{72}$$

دوباره از اتحاد (71) استفاده می‌کنیم تا تابع دلتای دیراک به وجود بیاید، اما جمله‌ی دیگری هم به وجود می‌آید که از مرتبه‌ی k_π^{-4} است و یعنی از مرتبه‌ی بالاتر عدد موج که کاری با آن نداریم. اگر این جمله را کنار بگذاریم، دقیقا به عبارتی می‌رسیم که در معادله‌ی (70) آمده است.

مراجع

[1] Griffiths, David. *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 2008.

[2] Marion, Jerry B. *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, 2013.

[3] Symon. K. R. *Mechanics*, Addison-Wesley, Reading (1960).

[4] Jackson, John David. *Classical electrodynamics*, (1999).