$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot D=\rho\\&\nabla\times H=J+\frac{\partial D}{\partial t}\\&\nabla\cdot B=0\\&\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$ معادلات ماکسول

① تعریف $\vec{A}$ و φ:

چون $\nabla\cdot B=0$ پس یک بردار $\vec{A}$ وجود دارد که $B=\nabla\times A$

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}\implies\nabla\times E=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times A)$$

$$\implies\nabla\times E+\nabla\times\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)=0\implies\nabla\times\left(E+\frac{\partial A}{\partial t}\right)=0$$

چون کرل $E+\frac{\partial A}{\partial t}$ صفر شده پس یک تابع φ وجود دارد به طوریکه: $E+\frac{\partial A}{\partial t}=-\nabla\varphi$

$$\implies\boxed{\begin{aligned}&\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial A}{\partial t}\\&\vec{B}=\nabla\times A\end{aligned}}$$ نتیجه نهایی:

② معادله حاکم بر φ

محیط خلاء:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\\&\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}\right\}\implies\nabla\cdot\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\implies$$

$$\implies\boxed{\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot A)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

③ معادله حاکم بر $\vec{A}$:

محیط خلاء

$$\left.\begin{aligned}&B=\nabla\times A\\&\nabla\times B=\mu_0 J+\frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}\end{aligned}\right\}\implies$$

$$\nabla\times\nabla\times A=\mu_0\vec{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\implies\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{J}-\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{J}}$$

---

④ تبدیلات پیمانه‌ای:

چون معادلات فوق اگر برای A و φ برقرار باشد (اگر $\vec{A}$ و φ جوابی از معادلات دیفرانسیل بالا باشند) آنگاه

$A' = A + \nabla\Lambda$ و $\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ ، A' و φ' نیز جوابی از معادله اند

(به ازای هر Λ دلخواه) پس مجموعه معادلات بالا در صورت جواب داشتن بی‌نهایت جواب دارد.

می‌توان یک A خاص درنظر گرفت و برای ساده سازی معادلات، ۲ دیورژانس A را دستی وارد کنیم:

الف) پیمانه کولن: $\nabla\cdot\vec{A} = 0$

ب) پیمانه لورنتس: $\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

در نهایت ← $B = \nabla\times A$ است برای هر دو پیمانه یکسان به دست آید

---

⑤ حل معادلات در پیمانه کولن:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot A) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 J \\ \nabla\cdot A = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu_0\vec{J} \end{cases}$$

قضیه هلمهولتز: هر میدان برداری مثل $\vec{J}$ را می‌توان بصورت جمع $\vec{J} = \vec{J}_t + \vec{J}_l$ ای نوشت که

$\nabla\times J_l = 0$ و $\nabla\cdot J_t = 0$

دیورژانس این قسمت صفر است

کرل این قسمت صفر است

$$\Rightarrow \nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 \left(J_t + J_\ell \right) + \frac{1}{c^2}\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

در این قسمت $\nabla \cdot A = 0$

$\nabla \cdot J_t = 0$

$\nabla \times J_\ell = 0$

کرل گرادیان صفر است

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 A - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 A}{\partial t} = -\mu_0 J_t \\[2ex] J_\ell + \dfrac{1}{c^2}\nabla \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

معادله (۱)

---

۶) حل معادلات در پیمانه لورنتس :

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot A\right) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\[2ex] \nabla^2 \vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot A + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{J} \\[2ex] \nabla \cdot A + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$\nabla^2 \varphi$ [redacted] $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

توجه: صورت دو معادله دیفرانسیل اخیر مشابه معادله (۱) در بالا می‌باشد.

---

۹) قضیه ریاضی. فرض کنید Ψ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{r}, t)$$

که $f(\vec{r}, t)$ یک تابع داده شده است.

آنگاه داریم:

$$\Psi(\vec{r},t)=\int dv' \frac{f(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

به طوریکه $t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$

---

(۱۰) با استفاده از قضیه ریاضی فوق دو معادله‌ای که در پیمانه لورنتس بدست آوردیم (شماره ۴) را حل می‌کنیم

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dv' \frac{\rho(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

و

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dv' \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \longleftarrow$$ به طوریکه

که به پتانسیل‌های تأخیری معروفند

نکته: پس با داشتن ρ و $\vec{J}$ در فضا با محاسبه انتگرالهای بالا φ و $\vec{A}$ در پیمانه لورنتس بدست می‌آید

بعد با استفاده از:

$$\begin{cases} B=\nabla\times A \\ E=-\nabla\varphi-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{cases}$$

می‌توان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را محاسبه نمود.