باسمه تعالی

تابش:

فرض کنید یک ρ و $\vec{J}$ در فضا داده شده است می‌خواهیم تابش ناشی از این ρ و $\vec{J}$ را محاسبه کنیم.

فرض کنید وابستگی زمانی ρ و $\vec{J}$ به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} \vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \\ \rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \end{cases}$$

از فصل مربوط به پتانسیل‌های تأخیری می‌دانیم که برای محاسبه $\vec{E}$ و $\vec{B}$ می‌توانیم $\vec{A}$ و φ را محاسبه کنیم و از روی آنها $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را بیابیم. همانطور که آنجا دیدید رابطه $\vec{E}$ و $\vec{B}$ با $\vec{A}$ و φ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

و $\vec{A}$ و φ در پیمانه لورنتس از روابط زیر به دست می‌آیند (به جزوه پتانسیل‌های تأخیری مراجعه کنید)

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int dv' \dfrac{\rho(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int dv' \dfrac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{cases} \quad ; \quad t' = t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$$

با جایگذاری J داریم:

$$\vec A(\vec r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dv' \, \frac{\vec J(r')\, e^{-i\omega t'}}{|\vec r - \vec r'|}\, dv'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dv' \, \frac{\vec J(r')\, e^{-i\omega\left(t - \frac{|r-r'|}{c}\right)}}{|\vec r - \vec r'|}\, dv'$$

$\boxed{\text{تعریف: } k = \frac{\omega}{c}}$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dv' \, \frac{\vec J(\vec r')\, e^{-i\omega t}\, e^{ik|\vec r - \vec r'|}}{|\vec r - \vec r'|}\, dv'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t}\int dv' \, \frac{\vec J(\vec r')\, e^{ik|\vec r - \vec r'|}}{|\vec r - \vec r'|}\, dv'$$

این انتگرال قابل محاسبه مستقیم نیست و باید تقریب بزنیم.

اگر ابعاد source را a فرض کنید (یعنی جایی که $\vec J$ وجود دارد و صفر نیست)

(توجه کنید که مکانی هم که می‌خواهیم $\vec A$ را محاسبه کنیم $\vec r$ است)

تقریب ناحیه دور (far field) یعنی $r \gg \lambda \gg a$ $\left(\lambda = \frac{2\pi}{k}\right)$

$$r \gg a \Rightarrow r \gg r'$$

انتگرال ما روی dv' است یعنی r' روی source است.

⇐ حال بسط‌های زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases} |\vec r-\vec r'| = r - \dfrac{\vec r\cdot\vec r'}{r} + \cdots \\[2ex] \dfrac{1}{|\vec r-\vec r'|} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\vec r\cdot\vec r'}{r} + \cdots \end{cases}$$

(فرمول های (۲۰-۲۸) و (۲۰-۳۰) کتاب ریتس)

$$\Rightarrow \vec A(\vec r,t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t}\int dv'\, \frac{\vec J(\vec r')\, e^{ik\left(r-\frac{\vec r\cdot\vec r'}{r}\right)}}{|r-r'|}$$

$$\simeq \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t}\int dv' \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\frac{\vec r\cdot\vec r'}{r}\right) e^{ik\left(r-\frac{\vec r\cdot\vec r'}{r}\right)}\vec J(r')$$

توجه: $e^{ik\left(r-\frac{\vec r\cdot\vec r'}{r}\right)} = e^{ikr}\, e^{-ik\frac{r\cdot r'}{r}} \simeq e^{ikr}\left(1-ik\frac{\vec r\cdot\vec r'}{r}\right)$

⇐ از روی دو رابطه فوق رابطه زیر را داریم:

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} + \cdots\right) e^{ik\left(r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} + \cdots\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} + \cdots\right) e^{ikr}\left(1 - ik\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} + \cdots\right)$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \cdots\right)\left(1 - ik\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} + \cdots\right)$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r}\left(1 + \left(\frac{1}{r} - ik\right)\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\underbrace{\frac{dP}{dt}}_{\text{مرتبه اول بسط}} + \underbrace{\int dv' \, \vec{J}(\vec{r}') \left(\frac{1}{r} - ik\right) \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}}_{\text{مرتبه دوم بسط}} + \dots \right)$$

توجه : $\int dv' \, J(r') \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} = ?$

اتحاد بک کب : $(\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}') = \frac{1}{2}\left[(\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{J}(r') + (\vec{r}\cdot\vec{J}(r'))\vec{r}'\right] + \frac{1}{2}\left(\vec{r}' \times \vec{J}(r')\right) \times \vec{r}$

گشتاور مغناطیسی $\vec{M} = \frac{1}{2} r \times J \quad , \quad \vec{m} = \int M \, dv'$

$$\Rightarrow \int dv' \, \vec{J}(r') \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} = \int dv' \left(\underbrace{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r\cdot r'}{r}\right) J(r') + (r\cdot J(r'))\vec{r}'\right]}_{\text{می توان دید که این قسمت به چهار قطبی الکتریکی مربوط می شود}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\vec{r}' \times J(r')\right) \times r}_{\text{مربوط به دوقطبی مغناطیسی}} \right)$$

(توجه کنید که $\int \frac{1}{2} r' \times J(r') = \vec{m}$)

$$\Rightarrow \text{مرتبه دوم بسط} = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} - ik\right)(\vec{m} \times \vec{r})$$

مربوط به دوقطبی مغناطیسی

پس تا اینجا $\vec{A}$ به صورت زیر بدست آمد:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{d\vec{p}}{dt} + \left(\frac{1}{r} - ik\right)(\vec{m} \times \vec{r}) + \cdots\right)$$

⇐ محاسبه $\vec{B}$ از روی $\vec{A}$:

برای بخش دوقطبی الکتریکی در کتاب کرل $\vec{A}$ را محاسبه کرده و داریم:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c r^2} e^{ikr} (\vec{r} \times \vec{p}) e^{-i\omega t}$$ ناشی از دوقطبی الکتریکی

(توجه کنید که چون p و کل به صورت $e^{-i\omega t}$ در زمان تغییر می‌کند $\frac{d\vec{p}}{dt} = -i\omega \vec{p}$ شده)

محاسبه $\vec{B}$ برای بخش دوقطبی مغناطیسی

$$\vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} - ik\right)(\vec{m} \times \vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{B}_m = \nabla \times \vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t}\, \nabla \times \left[\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{1}{r} - ik\right)(\vec{m} \times \vec{r})\right]$$

می‌توان با توجه به $\vec{m}$ داده شده این کرل را حساب کرد.

توجه کنید که داریم:

$$\vec{E}_m \neq -\frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} = -\frac{\mu_0 c k^2}{4\pi}\left(\frac{\vec{r} \times \vec{m}}{r}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right)$$

$$\vec{B}_m \simeq \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left\{\frac{k^2 \vec{r}}{r} \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r}\right)\right\}$$

برای دوقطبی مغناطیسی $\Rightarrow$

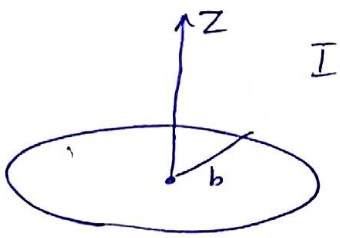
$$\begin{cases} \vec{E} \simeq -\dfrac{\mu_0}{4\pi} c k^2 (\vec{n} \times \vec{m}) \dfrac{e^{ikr}}{r} \\ \vec{H} = \dfrac{k^2}{4\pi} \hat{n} \times (\vec{m} \times \hat{n}) \dfrac{e^{ikr}}{r} \end{cases}$$

پس نتیجه نهایی: اگر یک $\vec{P}$ و $\vec{m}$ نوسانی داشته باشیم داریم:

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{k^2}{4\pi} \dfrac{e^{ikr}}{r} \left\{ \dfrac{1}{\varepsilon_0} (\hat{n} \times \vec{P}) \times \hat{n} - \mu_0 c \hat{n} \times \vec{m} \right\} \\ \vec{H} = \dfrac{\hat{n} \times \vec{E}}{Z_0} \qquad \left(Z_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \ , \ \hat{n} = \dfrac{\vec{r}}{r} \right) \end{cases}$$

مثال. مسأله (۳-۲.) کتاب: یک حلقه سیم دایره‌ای به شعاع b حامل جریان $I = I_0 \cos \omega t$

میدان‌های $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را بیابید:



$$I = \mathrm{Re}\{ I_0 e^{-i\omega t} \}$$

$$\vec{m}_0 = \pi b^2 I_0 e^{-i\omega t} \hat{k} \quad ; \quad \vec{P} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ -\mu_0 c \frac{\vec{r}}{r} \times (\pi b^2 I_0 e^{-i\omega t} \hat{k}) \right\}$$

$$\hat{r} \times \hat{k} = -\sin\theta \hat{\varphi}$$

$$= \frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ +\mu_0 c \pi b^2 I_0 e^{-i\omega t} \hat{\varphi} \sin\theta \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{k^2}{4\pi} \frac{1}{r} \left\{ \mu_0 c \pi b^2 I_0 \sin\theta \cos(kr - \omega t) \hat{\varphi} \right\}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{n} \times \vec{E}}{Z_0} = \frac{k^2}{4\pi r} \frac{\mu_0 c \pi b^2 I_0 \sin\theta \cos(kr - \omega t) \hat{\theta}}{Z_0}$$