اعوذ بالله من الشیطان الرجیم

بسم الله الرحمن الرحیم

نیروی الکتریکی

سید سعید هاشمی-دانشجوی دکتری فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

۱. معرفی نیروی الکتریکی

موضوع جلسه، نیروی الکتریکی است. در فیزیک پایه یک، با نیروی گرانشی آشنا شدید. بعد از اینکه کپلر، با رصد آسمان، دریافت که سیارات در منظومه شمسی در مدارهای بیضوی حول خورشید می‌چرخند، یک نظامی را در طبیعت کشف کرد: هر سیاره در مداری بیضوی در حرکت است. این بود تا اینکه نیوتون با چند فرض ساده توانست، با یک نظام عمیقتر، مدار سیارات را به دست بیاورد. او فرض کرد که بین سیارات و خورشید، نیروی گرانشی حاکم است و از طرفی قانون دوم نیوتون را هم فرض کرد و با این دو فرض، توانست ثابت کند که سیارات در مدارهای بیضوی حرکت می‌کنند. نکته جالبی که از کار نیوتون می‌توان آموخت این است که نیوتون، این فرضها را از تجربه نگرفت. به این معنا که هرگز نیروی بین مثلا زهره و خورشید را اندازه نگرفت، چون اصلا قابل اندازه‌گیری نیست. نیوتون از روی یک آزمایش ساده که روی زمین می‌توان انجام داد، این نکته را دید که در روی زمین، نیروی بین دو جسم با عکس مجذور فاصله آنها ارتباط دارد.

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

اما این نکته که ما بتوانیم، این آزمایش را که در یک شهر خاص، در یک تاریخ خاص از زمان انجام شده را، به امروز یا مکانهای دیگر تعمیم بدهیم، این را آزمایش نمی‌تواند تایید کند. بلکه یک نتیجه عقلی است که طبیعت در شرایط یکسان، یکسان عمل می‌کند، یعنی انتظار دارم که بین یک سیاره در آسمان و خورشید، همین وضعیت برقرار باشد (راسل استانارد که یک فیزیکدان انگلیسی است، کتابی دارد و فصل آخر کتاب را دکتر گلشنی نوشته اند. در آن فصل، دکتر گلشنی استدلال کرده‌اند که وحدت جهان مخلوق، انعکاسی از وحدت خالق آن است و لذا در این بستر، این نکته که این قوانین در همه زمانها و مکانها معتبرند را می‌توان فهمید).

در قانون گرانش، یک ویژگی اساسی از جسم باعث نیروی گرانشی می‌شود. جرم این خاصیت است. به این معنا که هرچقدر جرم دو جسم بیشتر باشد، نیرو بیشتر خواهد بود. پس به هر جسمی یک عدد نسبت می‌دهیم که نام آن را جرم می‌گذاریم. اندازه نیروی گرانشی بین دو جرم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

به طوریکه جهت نیرو همواره جاذبه است و m_1 جرم جسم اول و m_2 جرم جسم دوم و r فاصله بین دو جسم است. G یک ثابت است. این فرمول با آزمایشهایی که در روی زمین انجام شده تایید شده است. با تعمیم این

فرمول به آسمان، می‌بینیم که پیش‌بینی‌های ما از رفتار سیارات، تا حد خوبی درست در می‌آید (مثلا این مشاهده که سیارات در مدارهای بیضوی حرکت می‌کنند).

بعد از نیروی گرانشی، نیروی دیگری نیز کشف شد که به نیروی الکتریکی معروف است. بر روی زمین مشاهده شد که برخی اجسام، تمایل دارند که به سمت یکدیگر جذب شوند یا از یکدیگر دفع شوند. چیزی که تحت عنوان بار الکتریکی می‌شناسیم. همچنان که در دبیرستان دیده‌اید، دو بار همنام همدیگر را دفع و دو بار غیر همنام، همدیگر را جذب می‌نمایند. پس به هر جسم، علاوه بر جرم آن، یک عدد دیگر هم نسبت می‌دهیم که به آن بار الکتریکی می‌گوییم.

توجه کنید که در حد دانش فعلی، چهار نیرو در طبیعت کشف شده است. نیروی گرانشی و نیروی الکتریکی و نیروی هسته‌ای ضعیف و نیروی هسته‌ای قوی. برای هر یک از این نیروها یک خاصیت بنیادی به جسم نسبت می دهیم. مثلا برای گرانش، جرم را به جسم نسبت می‌دهیم و برای نیروی الکتریکی، خاصیت بار الکتریکی را به جسم نسبت می‌دهیم. برای نیروهای هسته‌ای هم خاصیت مربوط به خودشان مثل بار رنگی هست که مربوط به بحث ما نیست.

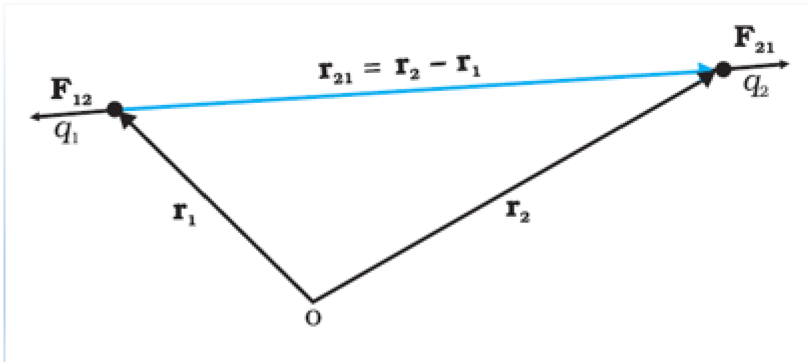
پس بار الکتریکی، یک عدد است که می‌تواند مثبت یا منفی باشد. درباره ماهیت آن قرار نیست حرف بزنیم. ما خواص هندسی یک جسم که طول و عرض و ارتفاع هست را درک می‌کنیم. اما اینجا می‌خواهیم بگوییم که در فیزیک، باید خواص دیگری نیز به جسم نسبت بدهید: جرم و بار الکتریکی از این دست خواص هستند. لذا همانطور که برای اندازه‌گیری مکان و زمان، واحد متر و ثانیه را می‌شناسیم، دو واحد بنیادی دیگر که هیچ ارتباطی با واحد متر و ثانیه ندارد وجود دارد. کیلوگرم واحد جرم و کولن، واحد بار الکتریکی است.

همانطور که در فیزیک دبیرستان دیده‌اید، این نیروی الکتریکی، دو خاصیت دارد: اندازه و جهت. اندازه نیرو به این معناست که مثلا با افزایش اندازه بار، نیرو قویتر می‌شود. اندازه این نیرو با آزمایش به صورت زیر به دست آمده است که به قانون کولن معروف است:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

به صورتی که q_1 بار الکتریکی جسم اول و q_2 بار الکتریکی جسم دوم و r فاصله دو جسم است. k یک ثابت است که به ثابت قانون کولن شناخته می‌شود.

گفتیم که این نیرو دارای جهت است. به این معنا که برای دو جسم با بار الکتریکی هم نام، نیرو دافعه است. دافعه یعنی اینکه جهت نیرو در امتداد خطی است که دو جسم را به یکدیگر متصل می‌کند. به همین ترتیب برای دو جسم با بار مختلف العلامه این نیرو جاذبه است.



شکل ۱ برداری که در راستای وصل کردن دو جسم قرار دارد.

ابزار ریاضی که می‌تواند، هم اندازه و هم جهت را نمایش دهد، بردار است. با توجه به شکل ۱ برداری که در راستای خطی است که دو جسم را به یکدیگر متصل می‌کند، را باید در نظر بگیریم (چون جهت نیرو در این راستا است). لذا اگر مکان جسم اول را با $\vec{r}_1$ نمایش دهیم (که علامت فلاش که بالای r_1 نوشته شده، نشان دهنده بردار است، یعنی چند مولفه دارد. مثلا در سه بعد که سه محور x و y و z را داریم، سه مولفه دارد) و مکان جسم دوم را با $\vec{r}_2$ نمایش دهیم، آنگاه مطابق شکل ۱راستایی که جهت نیرو را می‌تواند نشان دهد $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ است (توجه کنید که علامت منها در اینجا نشان دهنده تفاضل برداری است، یعنی مولفه‌های متناظر دو بردار را از هم کم می‌کنیم. همانطور که در بحث بردار در دبیرستان دیده‌اید). اما توجه می‌کنیم که بردار $\vec{r}_{21}$ یک بردار است که خودش طول دارد. و لذا بردار یکه در این راستا با تقسیم این بردار بر طولش به صورت $\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$ می‌باشد. به طوریکه نماد $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ به معنای طول بردار $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ است. توجه کنید که طول بردار $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ همان فاصله دو بار از یکدیگر می‌باشد. لذا به سادگی می‌توانیم، صورت قانون کولن را به شکل برداری، به صورت زیر نمایش دهیم. نیروی وارد بر بار دوم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F}_{21} = kq_1q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

به علامت بردار که در بالای F ظاهر شده و توان سه که در مخرج قرار دارد دقت کنید. نیروی وارد بر بار اول هم بر طبق قانون سوم نیوتون، دقیقا در خلاف جهت این نیرو است. یعنی در واقع داریم:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = kq_1q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

روش استفاده از این قانون در حل مسائل به این صورت است که باید بردارهای $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ را به دست بیاورید و در فرمول جایگذاری کنید. برای محاسبه بردارهای $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ باید محورهای مختصات و مبدا مختصات را در نظر بگیریم.

با چند مثال وضعیت استفاده از این قانون را نشان می‌دهیم.

مثال ۱. فرض کنید که یک بار الکتریکی به بار 1.0 کولن در نقطه $(2.0\,,3.0)$ و بار دیگری به بار 2.0 کولن در نقطه $(-2.0\,,1.0)$ قرار دارند. نیروی بین این دو بار را بیابید.

پاسخ.

بار یک کولنی را بار اول و بار دو کولنی را بار دوم فرض کنید. همانطور که در توضیحات بالا گفتیم، $\vec{r}_1$ برابر با بردار مکان بار اول و $\vec{r}_2$ برابر بردار مکان بار دوم است. لذا داریم:

$$\vec{r}_1 = (2,3)$$
$$\vec{r}_2 = (-2,1)$$

پس با توجه به فرمول داده شده، تفاضل دو بردار به صورت زیر داده می‌شود:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (2,3) - (-2,1) = (4,2)$$

و طول بردار برابر است با:

$$\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

و لذا نیرویی که به بار دوم وارد می‌شود برابر است با:

$$\vec{F}_{21} = kq_1q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} = k(1)(2)\frac{(4,2)}{(\sqrt{20})^3} = (9\times10^9)\frac{(2,1)}{2\times5^{\frac{3}{2}}}(\mathrm{N})$$

به واحد نیوتون که در انتهای محاسبه نوشته شده دقت کنید. پس نیروی وارد بر بار دوم، یک بردار است که دو مولفه آن به صورت زیر هستند:

$$F_x = (9\times10^9)\frac{1}{5^{\frac{3}{2}}}(\mathrm{N}) = 8\times10^8(\mathrm{N})$$

$$F_y = (9\times10^9)\frac{1}{2\times5^{\frac{3}{2}}}(\mathrm{N}) = 4\times10^8(\mathrm{N})$$

توجه کنید که اینجا، بالای F_x علامت بردار را قرار ندادیم. چون بردار نیست و فقط یک مولفه از یک بردار است. اندازه این نیرو برابر است با:

$$F_{21} = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2}\times10^8 = 9\times10^8(\mathrm{c})$$

در اینجا نیز از علامت بردار، در بالای F_{21} استفاده نکردیم. زیرا بردار نیست وطول بردار است. همانطور که در ابتدا قرارداد کردیم میتوانستیم، طول بردار را به صورت $\left|\vec{F}_{21}\right|$ نیز نمایش دهیم. در ادامه این درس، منظور ما از F_{21} همان طول بردار است و با $\left|\vec{F}_{21}\right|$ تفاوتی ندارد.

نکته. همانطور که مشاهده کردید، کولن واحد بسیار بزرگی است و دافعه بسیار شدیدی دارد. به طوریکه اگر یک کولن بار را در یک نقطه جمع کنید، بین ذرات آن دافعه عجیبی به وجود می‌آید و خطر انفجار دارد. لذا مقداری که عملا با آن مواجه هستیم، میکروکولن و یا نانوکولن است.

---

۲. اصل برهم‌نهی:

اگر چند نیرو به یک جسم وارد شوند، برای محاسبه برآیند کل نیرویی که به جسم وارد می‌شود، باید جهت نیرو را هم مدنظر قرار دهیم. جمع اندازه نیروها، برای محاسبه برآیند کفایت نمی‌کند. بلکه باید جمع برداری کنیم تا جهت را هم مدنظر قرار دهیم.

با استفاده از این اصل می‌توانیم، نیرویی که یک مجموعه بار الکتریکی به یک بار دیگر وارد می‌کند را محاسبه کنیم. در واقع ابتدا نیرویی که هر بار به صورت جدا جدا به آن بار وارد می‌کند را محاسبه کرده و در نهایت جمع برداری نیروها برابر نیروی کل وارد بر آن بار دیگر است.

مثال ۲.

فرض کنید که رئوس یک مکعب به طول یال 1.0 متر را به صورت یک درمیان سیاه و سفید کرده‌ایم. روی رئوس سیاه مکعب، بارهای به اندازه 1.0 کولن قرار داده ایم. اندازه نیرویی که به یکی از این بارها وارد می‌شود را محاسبه کنید.

پاسخ.

درست است که اینجا مساله از ما، فقط محاسبه اندازه نیرو را خواسته است. اما برای محاسبه اندازه نیرو، ناچار هستیم که به صورت برداری محاسبه کرده و در انتها اندازه بردار را محاسبه کنیم. چرا که در اصل برهم نهی، ما با صورت برداری مواجه هستیم.

لذا اینجا باید برای محاسبه صورت برداری نیرو، ابتدا محورهای مختصات را قرار می‌دهیم. یک گوشه از مکعب که سیاه است را مبدا مختصات فرض کنید و محورهای مختصات را بر روی یالهای مکعب بنا می‌کنیم. لذا مختصات بارهای الکتریکی به صورت زیر هستند.

$$\vec{r}_1 = (0,0,0)$$
$$\vec{r}_2 = (1,1,0)$$
$$\vec{r}_3 = (1,0,1)$$
$$\vec{r}_4 = (0,1,1)$$

لذا اگر بخواهیم نیروی وارد بر بار اول را محاسبه کنیم (باری که در مبدا مختصات قرار دارد)، داریم:

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (0,0,0) - (1,1,0) = (-1,-1,0)$$

$$\vec{r}_1-\vec{r}_3=(0,0,0)-(1,0,1)=(-1,0,-1)$$
$$\vec{r}_1-\vec{r}_4=(0,0,0)-(0,1,1)=(0,-1,-1)$$

و طول این بردارها هم برابر است با:

$$\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(0)^2}=\sqrt{2}$$
$$\left|\vec{r}_1-\vec{r}_3\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(0)^2}=\sqrt{2}$$
$$\left|\vec{r}_1-\vec{r}_4\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(0)^2}=\sqrt{2}$$

پس نیروی وارد بر بار اول از طریق بارهای دیگر برابر است با:

$$\vec{F}_{12}=kq_1q_2\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|}=(9\times10^9)\times\frac{(-1,-1,0)}{(\sqrt{2})^3}$$
$$\vec{F}_{13}=kq_1q_2\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|}=(9\times10^9)\times\frac{(-1,0,-1)}{(\sqrt{2})^3}$$
$$\vec{F}_{14}=kq_1q_2\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|}=(9\times10^9)\times\frac{(0,-1,-1)}{(\sqrt{2})^3}$$

پس نیروی کل، وارد بر بار اول برابر است با:

$$\vec{F}=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\vec{F}_{14}=\frac{(9\times10^9)}{(\sqrt{2})^3}\times\left((-1,-1,0)+(-1,0,-1)+(0,-1,-1)\right)=\frac{(9\times10^9)}{(\sqrt{2})^3}\times(-2,-2,-2)(\mathrm{N})$$

پس اندازه نیرو برابر است با:

$$\left|\vec{F}\right|=\sqrt{(F_x)^2+(F_y)^2+(F_z)^2}=\frac{(9\times10^9)}{(\sqrt{2})^3}\times\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2}=\frac{(9\times10^9)}{(\sqrt{2})^3}\times2\sqrt{3}=1.1\times10^{10}(\mathrm{N})$$

تمرین ۱. مساله ۳۴ فصل اول هالیدی

۳. قانون دوم نیوتون

بعد از اینکه بزرگی نیرو را محاسبه کردیم، می‌توانیم، از قانون دوم نیوتون برای محاسبه شتاب جسم استفاده کنیم. در واقع مشابه تحلیلی که در فیزیک یک آموختیم، اینجا هم نیروی الکتریکی را باید اضافه کرده و در تحلیل نیروها استفاده نمود. اگر جسمی در حال تعادل باشد، شتابش صفر و لذا برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است. همچنین برآیند گشتاورها در حالت تعادل صفر است. برای محاسبه گشتاور، از حاصل ضرب نیرو در بازوی گشتاور می‌توانید استفاده نمایید.

تمرین ۲. سوال ۴۲ فصل اول هالیدی

تمرین ۳. سوال ۵۰ فصل اول هالیدی

۴. قوانین درونی‌تر

قانون کولن را با آزمایش کشف کردیم. آیا می‌توانیم عمیقتر برویم؟ مثلا قبلا کپلر قانون حرکت سیارات در مسیر بیضوی را کشف کرده بود(با رصد). اما نیوتون با یک قانون عمیقتر، یعنی قانون دوم نیوتون و قانون نیروی گرانش که نیرو با فاصله به صورت عکس مجذور تغییر میکند، قانون کپلر را به صورت نتیجه اثبات کرد. اما خود قانون نیوتون، چه طور؟ آیا از یک قانون عمیقتر سرچشمه می‌گیرد؟ به همین ترتیب، آیا قانون کولن را می‌شود از یک قانون عمیقتر به دست آورد؟

اینجا می‌خواهیم، نکته‌ای را اشاره کنیم که هرچقدر به قوانین عمیقتر پی ببریم، به عجایب بیشتری دسترسی پیدا می‌کنیم و نظم ظریفتری را مشاهده می‌کنیم، مثل ذره بینی که هرچقدر بیشتر قرار بدهی، نکات ظریفتر و عمیقتری را می‌توان مشاهده کرد. برای مثال از روی قوانین کپلر، درکی از اینکه بین سیارات جاذبه وجود دارد، وجود نداشت. اما بعد از قوانین نیوتون، این فهم عمیقتر حاصل شد که بین سیارات و ستاره ها، یک نیروی از راه دور وجود دارد. اجازه دهید که یکی از این عجایبی که نشان دهنده نظم بسیار ظریف در عالم هست را معرفی کنیم. در قانون جاذبه، اگر ثابت گرانش یعنی G به اندازه 10^{-60} در واحدهای SI از مقدار خودش کمتر یا بیشتر بود، جهان مناسب برای حیات نبود. یعنی در این صورت به علت گرانش قویتر، اجزای جهان به سرعت به سمت هم جذب شده و امکان تشکیل ستاره‌ها و سیارات وجود نداشت. به همین ترتیب در مورد گرانش ضعیفتر، اجزای جهان به سرعت از هم دور شده بودند و ستاره و سیاره‌ای تشکیل نمی‌شد. در واقع وضعیت به گونه‌ای است که گویا شرایط برای حیات مهیا شده است. اگر ثابت G کمی از این مقدارش متفاوت بود، جهان نمی‌توانست پذیرای حیات باشد. اگرچه با قانون کپلر این نکته را متوجه می‌شویم که خدا جهان را با نظم خلق کرده است، اما با این قوانین عمیقتر، پی به نکات بیشتری می‌بریم. اگرچه در جهان، قانون و نظم حاکم است. مثلا خورشید و ستاره‌ها هرگز از این قوانین سرپیچی نمی‌کنند. اما اینگونه نیست که هر نظمی حاکم باشد. بلکه نظمی خاص و ظریف حاکم است. به این معنا که اگر ثابت G از مقدارش کوچکتر بود، بازهم قانونی حاکم بود. لذا خدا جهان را با نظم آفریده است، نه هر نظمی، بلکه نظمی ظریف و خاص، به طوری که برای موجودات زنده مناسب باشد.

در مورد قانون کولن نیز همچین تنظیم ظریفی وجود دارد. این نکته را که نیرو به صورت $\frac{1}{r^2}$ تغییر می‌کند، را در نظر بگیرید. در صورتی که این نیرو به صورت $\frac{1}{r^3}$ تغییر می‌کرد، بر اساس قوانین کوانتوم، اتمها ناپایدار می‌شدند و لذا اتمی در جهان وجود نداشت. بدون اتم، حیات امکان ندارد! به همین ترتیب اگر این نیرو به صورت $\frac{1}{r}$ تغییر می‌کرد نیز اتمها ناپایدار بوده و جهان برای موجودات زنده مناسب نبود. در انتها به صحبت جان اوکیف ستاره شناس ارشد ناسا گوش می‌دهیم:

"اگر جهان با بالاترین دقت ساخته نمی‌شد ما هرگز نمی توانستیم وجود داشته باشیم. من شخصا باور دارم که جهان برای سکونت انسان ها آفریده شده است."

۵. میدان الکتریکی

یک ذره باردار با بار q که در مکان $\vec{r}'$ قرار دارد را در نظر بگیرید. اگر یک بردار در مکان $\vec{r}$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\vec{E}(\vec{r}) = kq\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

آنگاه می‌توانیم نیرویی که به یک ذره با بار q' که در مکان $\vec{r}$ قرار دارد را به صورت زیر به دست بیاوریم:

$$F = q'E$$

پس با این تصویر، ذره q یک میدان E در فضا ایجاد می‌کند که توسط ذره دیگر احساس شده و باعث اعمال نیرو به ذره دیگر می‌شود.

تکنیک محاسبه این میدان مشابه محاسبه نیرو است. به این معنا که ابتدا بردار $\vec{r}'$ که بردار مکان ذره است را محاسبه کرده و سپس بردار $\vec{r}$ یعنی جایی که می‌خواهیم، میدان را محاسبه کنیم را در نظر گرفته و از قانون فوق استفاده می‌کنیم.

مثال ۳. فرض کنید که دو بار الکتریکی q در روی محور y به صورت متقارن با فاصله d از مبدا قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی روی محور x را به دست بیاورید و آن را برحسب x رسم نمایید.

پاسخ.

مکان بار اول را با $\vec{r}_1$ و مکان بار دوم را با $\vec{r}_2$ نمایش می‌دهیم:

$$\vec{r}_1 = (0\,,d)$$
$$\vec{r}_2 = (0\,,-d)$$

می‌خواهیم میدان را روی محور x پیدا کنیم. پس داریم:

$$\vec{r} = (x\,,0)$$

پس داریم:

$$\vec{r}-\vec{r}_1 = (x,0)-(0,d) = (x,-d)$$
$$\vec{r}-\vec{r}_2 = (x,0)-(0,-d) = (x,d)$$

و لذا طول این بردارها برابر است با:

$$\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right| = \sqrt{x^2+(-d)^2} = \sqrt{x^2+d^2}$$
$$\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right| = \sqrt{x^2+d^2}$$

پس میدان ناشی از بار اول برابر است با:

$$\vec{E}_1 = kq\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^3} = kq\frac{(x,-d)}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\vec{E}_2 = kq\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|^3} = kq\frac{(x,d)}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

پس میدان کل برابر است با:

$$\vec{E} = \vec{E}_1+\vec{E}_2 = kq\frac{(2x,0)}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

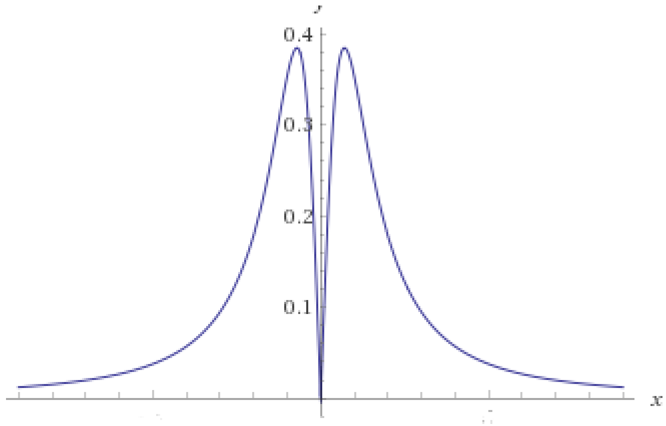
پس میدان فقط دارای مولفه ایکس بوده و مولفه دوم میدان صفر است:

$$E_x = kq\frac{2x}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

برای یافتن نقاط اکسترمم میدان، باید از E_x نسبت به ایکس مشتق بگیریم:

$$\frac{dE_x}{dx} = 2kq\frac{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(2x)(x^2+d^2)^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+d^2)^3} = 0$$
$$\Rightarrow\ (x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(2x)(x^2+d^2)^{\frac{1}{2}}x = 0$$
$$\Rightarrow\ (x^2+d^2)-\frac{3}{2}(2x)x = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x^2+d^2 = 0$$
$$\Rightarrow\ x = \pm\frac{d}{\sqrt{2}}$$

پس در نقاط $x = \pm\frac{d}{\sqrt{2}}$ اندازه میدان به حداکثر خود میرسد. توجه کنید که در مبدا، اندازه میدان صفر شده و به حداقل خود میرسد:



شکل ۲اندازه میدان روی محور x واحد محور y به صورت دلخواه است.

توجه کنید که در حل این سوال، به جای اینکه خودمان را با سینوس و کسینوس و روابط مثلثاتی درگیر کنیم، به سادگی با استفاده از صورت برداری میدان الکتریکی، از تمام محاسبات پیچیده خود را رها کردیم. این یک مثال بود که قدرت تحلیل برداری را نشان میدهد.
