اعوذ بالله من الشیطان الرجیم

بسم الله الرحمن الرحیم

میدان الکتریکی

سید سعید هاشمی-دانشجوی دکتری فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

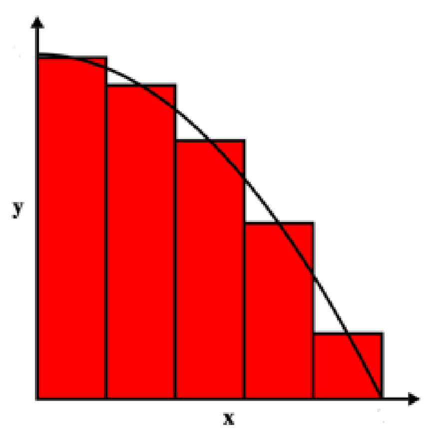
۱. مقدمه

همانطور که در فصل قبل گفته شد، میدان الکتریکی بردار است و دارای جهت و اندازه است. همچنین در صورتی که سیستم از چند ذره تشکیل شده بود، می‌توان از اصل برهمنهی استفاده نمود و با محاسبه میدان ناشی از تک تک اجزا، با جمع برداری این اجزاء، میدان کل را محاسبه نمود. همین ایده را می‌توان به یک مجموعه پیوسته تعمیم داد. به این معنا که یک مجموعه را می‌توان به اجزاء کوچکتر تقسیم کرد و میدان ناشی از هر بخش را جداگانه محاسبه کرده و با جمع برداری، میدان کل را محاسبه کرد. در حالتی که با مجموعه پیوسته مواجه باشیم، جمع به انتگرال تبدیل می‌شود. در ادامه به توضیح بیشتر می‌پردازیم.

۲. مثالی از تقسیم سیستم به اجزاء کوچکتر

برای مثال فرض کنید که می‌خواهیم مساحت زیر یک نمودار را محاسبه نماییم. در اینجا می‌توانیم، مساحت را به بخشهای کوچکتر تقسیم کنیم و با جمع زدن مساحت بخشهای کوچک، مساحت کل را محاسبه نماییم. برای مثال به شکل ۱ توجه کنید. در این شکل مساحت کل زیر نمودار برابر با S و محور x را به قسمتهایی با طول Δx تقسیم کرده‌ایم. پس عرض هر مستطیل کوچک برابر با Δx و طول هریک از آنها برابر با y در آن نقطه به خصوص است. اگر نقطه x_i را در نظر بگیریم، طول مستطیل برابر با $y(x_i)$ است (یعنی مقدار تابع در نقطه x_i). پس مساحت کل تقریبا برابر است با:

$$S \simeq \sum_i y(x_i)\Delta x$$

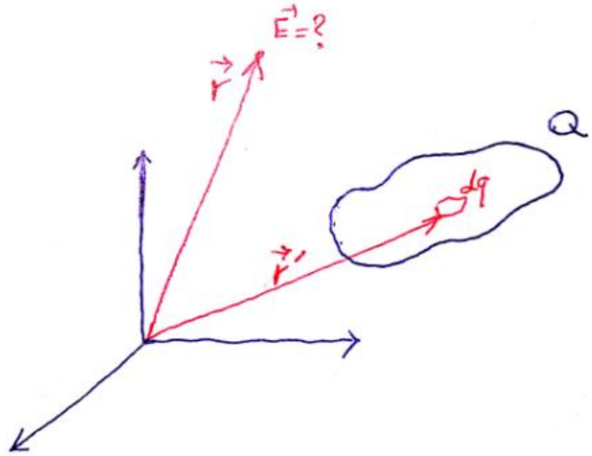


شکل ۱ مثالی از تقسیم به اجزاء کوچکتر

حال در حالت حدی، این جمع به انتگرال تبدیل می‌شود. در واقع در شکل ۱ عرض مستطیل‌ها به dx و طول مستطیلها برابر با y است. و در این حالت مساحت هر مستطیل کوچک برابر با حاصل ضرب طول و عرض یعنی ydx می‌شود. پس مساحت کل زیر نمودار جمع همه این ydx هاست:

$$S = \int ydx$$

۳. تقسیم بار الکتریکی بزرگ به بارهای کوچک



شکل ۲ تقسیم یک جسم با بار Q به اجزای کوچکتر dq

مورد قبلی یک مثال بود که چگونه می‌توان با تقسیم به اجزای کوچکتر، مساله را حل نمود. حال به فیزیک و محاسبه میدان الکتریکی باز می‌گردیم. می‌خواهیم میدان الکتریکی از یک مجموعه بار الکتریکی را محاسبه نماییم. مطابق با شکل ۲ ،یک عنصر کوچک dq از جسم را در نظر می‌گیریم که در مکان $\vec{r}'$ قرار دارد و ما می‌خواهیم میدان را در مکان $\vec{r}$ محاسبه نماییم. میدان ناشی از این عنصر دیفرانسیلی، که یک بخش کوچکی از کل میدان است را با $d\vec{E}$ نمایش می‌دهیم. میدان کل، از حاصل جمع برداری همه این $d\vec{E}$ها به دست می‌آید. با توجه به توضیحات فصل قبل، $d\vec{E}$ برابر است با:

$$d\vec{E} = k\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dq$$

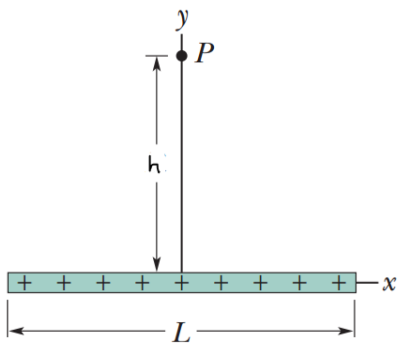
پس میدان کل در نقطه $\vec{r}$ که با $\vec{E}(\vec{r})$ نمایش می‌دهیم، برابر با جمع همه این میدانهای کوچک می‌شود (که در این حالت حدی همان انتگرال است) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E} = \int k\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dq$$

به طوری که حدود انتگرال به گونه‌ای است که کل جسم را پوشش بدهد. در واقع در زیر انتگرال $\vec{r}$ تغییر نمی‌کند و بردار $\vec{r}'$ که مکان المانهای ماست، طوری تغییر می‌کند که کل جسم را پوشش بدهد. لذا برای محاسبه انتگرال باید dq را به طریقی به $\vec{r}'$ مربوط کنیم. مثلا در حالتی که یک خط بار با چگالی خطی ثابت λ داریم، $dq = \lambda dl$ است، به طوریکه dl طول این المان است. با ذکر مثالی وضعیت واضح خواهد شد.

مثال ۱. یک پاره‌خط بار با چگالی خطی λ و طول L را در نظر بگیرید و میدان را از فاصله h عمود منصف آن محاسبه نمایید.

پاسخ.



شکل ۳ محورهای مختصات مربوط به یک میله باردار

همانطور که گفته شد، چون تحلیل برداری می‌کنیم، در مرحله اول باید محورهای مختصات را قرار دهیم. مطابق با شکل ۳ محورها را در نظر بگیرید. حال یک المان دلخواه dq را در نظر می‌گیریم (علت اینکه dq نوشته ایم، این است که چون فقط یک بار کوچک است. کل بارها که در طول کل پاره خط به صورت یکنواخت توزیع شده اگر Q باشد، این طول کوچک، فقط بار کوچکی دارد، و لذا با نماد دیفرانسیلی نمایش می‌دهیم). این المان در مکان $\vec{r}'$ قرار دارد.

$$\vec{r}' = (x', 0)$$

چون قرار است که مکان المان روی کل جسم تغییر کند، لذا مکان المان را با متغیر x' که می‌تواند در سرتاسر پاره‌خط تغییر کند مشخص کرده‌ایم. جایی که می‌خواهیم میدان را محاسبه کنیم یعنی بردار $\vec{r}$ برابر است با:

$$\vec{r} = (0, h)$$

پس تفاضل این دو بردار و طول آن را به سادگی می‌توانیم محاسبه کنیم:

$$\vec{r} - \vec{r}' = (0, h) - (x', 0) = (-x', h)$$

$$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(-x')^2 + h^2} = \sqrt{x'^2 + h^2}$$

از جانبی، اینجا المان دیفرانسیلی dq ما یک طول دارد. با توجه به تعریف $\vec{r}'$ این طول برابر است با dx' (چرا؟). پس با توجه به اینکه توزیع بار یکنواخت است، لذا بار برابر با طول ضربدر چگالی می‌شود:

$$dq = \lambda dx'$$

حدود انتگرال به گونه‌ای است که باید کل جسم را پوشش دهد. یعنی x' از $-\frac{L}{2}$ تا $+\frac{L}{2}$ تغییر کند. میدان کوچکی که این عنصر دیفرانسیلی ایجاد می‌کند برابر است با:

$$d\vec{E} = k\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq = k\frac{(-x', h)}{(\sqrt{x'^2 + h^2})^3} \lambda dx'$$

پس میدان کل، برابر جمع همه اینها (یعنی انتگرال) خواهد بود:

$$\vec{E} = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} k\frac{(-x', h)}{(\sqrt{x'^2 + h^2})^3} \lambda dx'$$

دقت کنید که برای محاسبه این انتگرال، دو مولفه وجود دارد:

$$E_x = k\lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{-x'}{(\sqrt{x'^2+h^2})^3} dx'$$

$$E_y = k\lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{h}{(\sqrt{x'^2+h^2})^3} dx'$$

با توجه به فرد بودن انتگرال مولفه x به سادگی می‌توان دید که $E_x = 0$ است. برای محاسبه انتگرال دوم، می‌توان به سادگی با تغییر متغیر، انتگرال را محاسبه نمود. چون با تحلیل انتگرال، از فیزیک مساله دور می‌شویم، جزئیات حل را به خواننده موکول می‌کنیم. (نگاهی به پیوست ب کتاب هالیدی کنید و انتگرال ۱۹ را ببینید)

$$E_y = hk\lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{1}{(\sqrt{x'^2+h^2})^3} dx' = hk\lambda \left(\frac{x'}{h^2\sqrt{x'^2+h^2}}\right)\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = hk\lambda\left(\frac{+\frac{L}{2}}{h^2\sqrt{(+\frac{L}{2})^2+h^2}} - \frac{-\frac{L}{2}}{h^2\sqrt{(-\frac{L}{2})^2+h^2}}\right)$$

$$= \frac{k\lambda L}{h\sqrt{(\frac{L}{2})^2+h^2}}$$

پس میدان برحسب پارامترهایی که در صورت سوال ذکر شده بود، به دست آمد (یعنی λ و L و h).

توجه کنید که در این سوال، به سادگی با تحلیل برداری، توانستیم مساله را حل کنیم و خودمان را درگیر سینوس و تحلیل زوایا نکردیم. دقت کنید که اگرچه در برخی سوالات، با تحلیل سینوس و زاویه و غیره، می‌توان مساله را حل نمود، اما تحلیل برداری، یک راه حل سرراست ارائه می‌دهد که قابلیت اجرا روی همه مسائل را دارد.

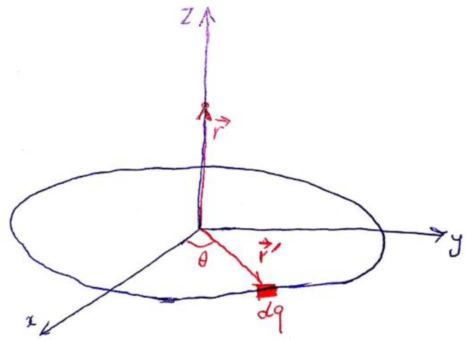
تمرین۱. میدان حاصل از این پاره خط را در نقطه دلخواه (x,y) روی صفحه محاسبه کنید. ثابت کنید:

$$E_x = k\lambda\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2+y^2}}\right] \quad ; E_y = \frac{k\lambda}{y}\left[\frac{x+\frac{L}{2}}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2+y^2}} - \frac{x-\frac{L}{2}}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2+y^2}}\right]$$

تمرین ۲. با تحلیل تمرین ۱ دو سر پاره خط بار را با B و C نمایش دهید. فرض کنید مکانی که میدان را در آن حساب کردیم A باشد. با استفاده از بردار میدان که در تمرین ۱ به دست آمد، ثابت کنید، این میدان در راستای نیمساز راس A از مثلث ABC است(راهنمایی: برای تحلیل زاویه‌ها باید از ضرب داخلی یا ضرب خارجی استفاده کنید).

مثال ۲. یک دایره با شعاع R با چگالی بار خطی یکنواخت λ روی صفحه x-y در نظر بگیرید و با تحلیل برداری، میدان را در فاصله z روی محور آن محاسبه کنید.

پاسخ.



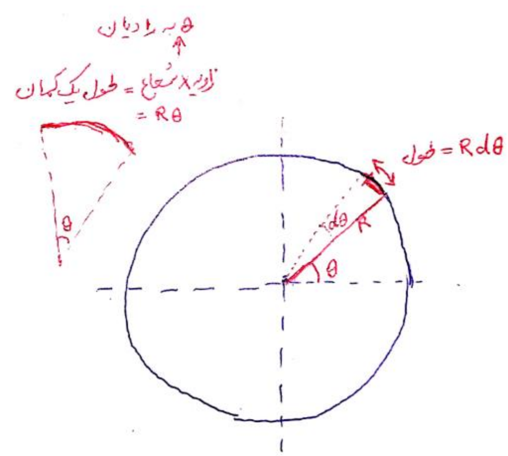
شکل ۴ المان طول در مورد یک دایره

تحلیلهای اولیه این مساله مشابه مساله قبل است. یعنی یک عنصر دیفرانسیلی dq روی دایره در نظر می‌گیریم و مکان آن را با $\vec{r}'$ نمایش می‌دهیم و مکان نقطه‌ای که قرار است، در آنجا میدان را محاسبه کنیم، با $\vec{r}$ مشخص می‌کنیم. چون دایره یک بُعد دارد، لذا برای تعیین بردار $\vec{r}'$ باید یک متغیر داشته باشیم. لذا مشخص کردن بردار $\vec{r}'$ به صورت $\vec{r}' = (x', y', 0)$ کار عاقلانه‌ای نیست. چون اینجا دو متغیر x' و y' وارد شده است. لذا یک انتخاب هوشمندانه در مسائلی که با دایره مواجه هستیم، انتخاب زیر است:

$$\vec{r}' = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

در اینجا فقط یک متغیر θ وجود دارد که برای اینکه کل دایره را پوشش بدهد، از 0 تا 2π تغییر می‌کند. نکته مهم بعدی در تعیین dq است که باید برحسب این متغیر θ بیان شود. توجه می‌کنیم که این عنصر دیفرانسیلی یک طول دارد که این طول در مورد دایره به صورت $Rd\theta$ داده می‌شود، پس چون چگالی بار یکنواخت است، داریم (چرا؟)

$$dq = \lambda R d\theta$$



شکل ۵ طول یک المان روی دایره برابر شعاع ضربدر زاویه می‌شود.

همچنین برای بردار $\vec{r}$ داریم:

$$\vec{r} = (0, 0, z)$$

پس به سادگی تفاضل بردار $\vec{r}$ و $\vec{r}'$ را می‌توانیم محاسبه کنیم:

$$\vec{r} - \vec{r}' = (0, 0, z) - (R\cos\theta, R\sin\theta, 0) = (-R\cos\theta, -R\sin\theta, z)$$

$$\left|\vec{r} - \vec{r}'\right| = \sqrt{(-R\cos\theta)^2 + (-R\sin\theta)^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + z^2}$$

پس میدان دیفرانسیلی که ناشی از این عنصر دیفرانسیلی در نقطه $\vec{r}$ ایجاد می‌شود، برابر است با:

$$d\vec{E} = k\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dq = k\frac{(-R\cos\theta, -R\sin\theta, z)}{(\sqrt{R^2+z^2})^3}\lambda R d\theta$$

پس کل میدان، از حاصل جمع این میدانهای کوچک(یعنی انتگرال) به دست می‌آید:

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} k\frac{(-R\cos\theta, -R\sin\theta, z)}{(\sqrt{R^2+z^2})^3}\lambda R d\theta$$

پس میدان سه مولفه خواهد داشت:

$$E_x = k\lambda R\int_0^{2\pi}\frac{-R\cos\theta}{(\sqrt{R^2+z^2})^3}d\theta = \frac{-k\lambda R^2}{(\sqrt{R^2+z^2})^3}\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta = 0$$

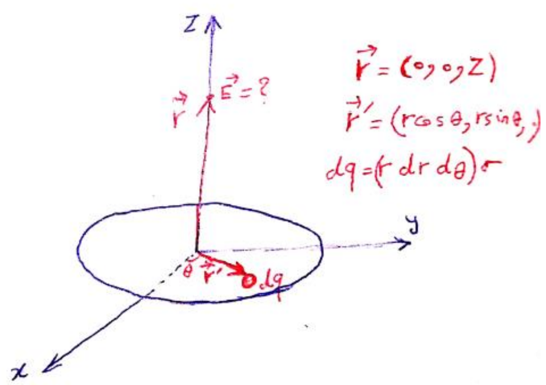
$$E_y = k\lambda R\int_0^{2\pi}\frac{-R\sin\theta}{(\sqrt{R^2+z^2})^3}d\theta = \frac{-k\lambda R^2}{(\sqrt{R^2+z^2})^3}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta = 0$$

$$E_z = k\lambda R\int_0^{2\pi}\frac{z}{(\sqrt{R^2+z^2})^3}d\theta = \frac{k\lambda Rz}{(\sqrt{R^2+z^2})^3}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{k\lambda Rz(2\pi)}{(\sqrt{R^2+z^2})^3}$$

مشاهده می‌شود که پاسخ نهایی، برحسب داده‌های مساله یعنی λ و R و z به دست آمد.

مثال ۳. یک دیسک توپر با شعاع R و چگالی سطحی بار σ در نظر بگیرید. میدان را در فاصله z بر روی محور آن محاسبه کنید.

پاسخ.



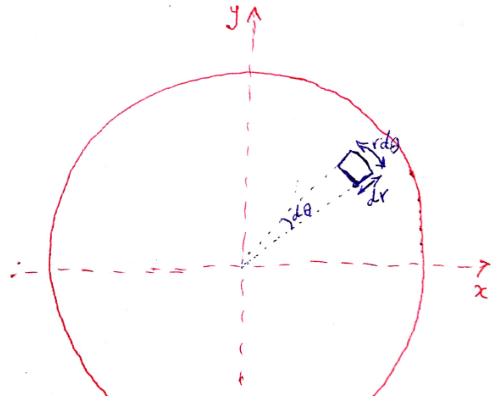
شکل ۶ وضعیت المان سطح روی دیسک. به المان کوچک بار دقت کنید.

مشابه مسائل قبلی، یک المان کوچک dq را در نظر می‌گیریم. مکان این المان را با $\vec{r}'$ نمایش می‌دهیم و مکان نقطه‌ای که قرار است، در آنجا میدان را محاسبه کنیم، با $\vec{r}$ مشخص می‌کنیم. چون دیسک دو بُعد دارد، لذا برای تعیین بردار $\vec{r}'$ باید دو متغیر داشته باشیم. لذا اگرچه انتخاب بردار $\vec{r}'$ به صورت $\vec{r}' = (x', y', 0)$ مشکلی از این جهت ندارد، اما برای حالت دایره، بهتر است که از r و θ استفاده کنیم، لذا یک انتخاب هوشمندانه در این مساله، انتخاب زیر است:

$$\vec{r}' = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$

به طوریکه r متغیری است که از 0 تا R تغییر می‌کند و θ متغیری است که از 0 تا 2π تغییر می‌کند. در اینجا برای محاسبه عنصر دیفرانسیلی dq توجه می‌کنیم که این عنصر یک مساحت دارد که مساحت آن برابر است با $rdrd\theta$ است(چرا؟). پس داریم:

$$dq = \sigma r dr d\theta$$



شکل ۷ المان مساحت بر روی یک دایره. مساحت المان برابر طول ضربدر عرض میشود.

برای سایر موارد به سادگی خواهیم داشت:

$$\vec{r} = (0,0,z)$$
$$\vec{r}-\vec{r}' = (0,0,z)-(r\cos\theta, r\sin\theta, 0) = (-r\cos\theta, -r\sin\theta, z)$$
$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(-r\cos\theta)^2+(-r\sin\theta)^2+z^2} = \sqrt{r^2+z^2}$$

پس خواهیم داشت:

$$d\vec{E} = k\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dq = k\frac{(-r\cos\theta,-r\sin\theta,z)}{(\sqrt{r^2+z^2})^3}\sigma r dr d\theta$$

پس اینجا با انتگرال دو متغیره مواجه خواهیم بود:

$$\vec{E} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} k\frac{(-r\cos\theta,-r\sin\theta,z)}{(\sqrt{r^2+z^2})^3}\sigma r dr d\theta$$

پس سه مولفه میدان به صورت زیر خواهند بود:

$$E_x = k\sigma\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\frac{-r\cos\theta}{(\sqrt{r^2+z^2})^3} r dr d\theta = 0$$
$$E_y = k\sigma\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\frac{-r\sin\theta}{(\sqrt{r^2+z^2})^3} r dr d\theta = 0$$

$$E_z = k\sigma z\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\frac{1}{(\sqrt{r^2+z^2})^3} r dr d\theta = k\sigma z(2\pi)\int_{0}^{R}\frac{r}{(\sqrt{r^2+z^2})^3}dr = k\sigma z(2\pi)\left(\frac{-1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)\Bigg|_{r=0}^{R} = k\sigma z(2\pi)\left(\frac{-1}{\sqrt{R^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2}}\right)$$
$$= k\sigma(2\pi)\left(\frac{-z}{\sqrt{R^2+z^2}}+\frac{z}{|z|}\right) = \begin{cases} k\sigma(2\pi)\left(\frac{-z}{\sqrt{R^2+z^2}}+1\right) & ;z>0 \\ k\sigma(2\pi)\left(\frac{-z}{\sqrt{R^2+z^2}}-1\right) & ;z<0 \end{cases}$$

پس حد میدان به سمت z=۰ با توجه به اینکه 0^+ یا 0^- باشد متفاوت است. (در واقع دقیقا در z=۰ میدان بنا به تقارن باید صفر باشد، اما در 0^+ یا 0^- میدان صفر نیست). پس اندازه میدان در حد به سمت صفر برابر با $2\pi k\sigma$ است.

۴. چگالی بار غیریکنواخت

در صورتی که چگالی بار الکتریکی غیر یکنواخت بود، چگالی بار را نمیتوان به صورت یک ثابت از انگرال بیرون آورد. در واقع هنگامی که با بار الکتریکی خطی مواجه هستیم، المان dq را به صورت $dq=\lambda dl$ نشان می‌دهیم که dl طول المان است. در صورتی که λ ثابت نباشد و مثلا به x وابسته باشد، تنها تفاوتی که دارد این است که λ را در هنگام انتگرال گیری، نمی‌توان از انتگرال خارج نمود.

تمرین ۳. فرض کنید که باری روی یک میله روی محور x از 0 تا L با چگالی خطی $\lambda=\alpha x$ توزیع شده است(α یک ثابت است). میدان الکتریکی را در نقطه دلخواه روی محور y بیابید.

۵. محاسبه نیرو

بعد از اینکه یاد گرفتیم، میدان الکتریکی را محاسبه کنیم، حالا می‌توانیم نیرویی که به یک ذره داخل این میدان وارد می‌شود را محاسبه کنیم. در واقع $\vec{F}=q\vec{E}$ است. حال اگر یک مجموعه پیوسته داشتیم که داخل یک میدان الکتریکی قرار گرفته است، با تقسیم آن مجموعه به بخشهای کوچک، نیروی کل وارد بر آن را محاسبه می‌نماییم.

مثال ۴. دو پاره خط بار با طول L و چگالی خطی یکنواخت λ در نظر بگیرید که روی محور x قرار گرفته‌اند. فاصله مرکز دو پاره خط از یکدیگر a است. نیرویی که این دو پاره‌خط به یکدیگر وارد می‌کنند، پیدا کنید.

راه حل:

مرکز را در نقطه بین دو پاره خط قرار می‌دهیم. پس پاره خط اول بین بازه $[-\frac{L}{2}-\frac{a}{2},+\frac{L}{2}-\frac{a}{2}]$ قرار دارد. پاره خط دوم نیز در بازه $[-\frac{L}{2}+\frac{a}{2},+\frac{L}{2}+\frac{a}{2}]$ قرار دارد. ابتدا میدان الکتریکی که پاره خط اول در نقطه دلخواه $(x,0)$ روی محور x ایجاد می‌کند، را محاسبه می‌کنیم و سپس فرض میکنیم که پاره‌خط دوم در این میدان قرار گرفته و نیروی وارد بر آن را محاسبه می‌نماییم. برای محاسبه میدان الکتریکی که پاره خط اول ایجاد می‌کند، به سادگی داریم:

$$\vec{E}=\int k\frac{(x,0)-(x',0)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dq=k\lambda\int_{-\frac{L}{2}-\frac{a}{2}}^{+\frac{L}{2}-\frac{a}{2}}\frac{(x-x',0)}{|x-x'|^3}dx'=k\lambda\int_{-\frac{L}{2}-\frac{a}{2}}^{+\frac{L}{2}-\frac{a}{2}}\frac{(1,0)}{(x-x')^2}dx'=k\lambda\left(\frac{(1,0)}{x-x'}\right)\Bigg|_{x'=-\frac{L}{2}-\frac{a}{2}}^{+\frac{L}{2}-\frac{a}{2}}$$

$$=\left(k\lambda\left(\frac{1}{x-(\frac{L}{2}-\frac{a}{2})}-\frac{1}{x-(-\frac{L}{2}-\frac{a}{2})}\right),0\right)$$

حال برای محاسبه نیرویی که به پاره‌خط دوم وارد می‌شود، فرض کنید که پاره خط دوم را در این میدان قرار داده‌ایم. پس یک عنصر کوچک دیفرانسیلی dq از این پاره خط دوم در نظر بگیرید که در مکان $\vec{r}=(x,0)$ قرار دارد. اینجا x اگر از $-\frac{L}{2}+\frac{a}{2}$ تا

$+\frac{L}{2}+\frac{a}{2}$ تغییر کند، آنگاه کل پاره خط دوم را پوشش می‌دهد. نیرویی که به این عنصر دیفرانسیلی وارد می‌شود برابر بار الکتریکی این عنصر، ضربدر اندازه میدان در آن نقطه است. پس اگر این بخش کوچک از نیرو را با dF نمایش دهیم، داریم(علامت میدان را با توجه به اینکه همه چیز بر روی محور ایکس است و مولفه y نداریم حذف میکنیم):

$$dF = Edq = \lambda Edx$$

پس نیروی کل که به خط بار دوم وارد می‌شود، برابر جمع همه این نیروهای کوچک خواهد بود(یعنی انتگرال):

$$F = \int E\lambda dx = \lambda \int_{-\frac{L}{2}+\frac{a}{2}}^{+\frac{L}{2}+\frac{a}{2}} k\lambda\left(\frac{1}{x-\frac{L}{2}+\frac{a}{2}} - \frac{1}{x+\frac{L}{2}+\frac{a}{2}}\right)dx = k\lambda^2 \left(\ln(x-\frac{L}{2}+\frac{a}{2}) - \ln(x+\frac{L}{2}+\frac{a}{2}) \right)\Bigg|_{x=-\frac{L}{2}+\frac{a}{2}}^{+\frac{L}{2}+\frac{a}{2}}$$

$$= k\lambda^2 \left(\ln(a) - \ln(L+a) - \ln(-L+a) + \ln(a) \right)$$

توجه کنید که اینجا این نکته نیرو از راه دور مشاهده می‌شود. یعنی دو بار از راه دور بر روی یکدیگر، تاثیر می‌گذارند.

---

۶. قانون دوم نیوتون

بعد از محاسبه میدان و محاسبه نیرو، با استفاده از قانون دوم نیوتون، می‌توان رفتار یک جسم را پیش‌بینی نمود. در مواردی که فقط به یک ذره نیرو وارد می‌شود، فقط محاسبه نیرو کفایت می‌کند. اما اگر یک جسم پیوسته بود که تحت یک نیرو قرار گرفته بود، باید گشتاور وارد بر آن را نیز محاسبه کنید.

تمرین۴. الکترونی مقید است که بر روی محور مرکزی حلقه‌ی باردار به شعاع R با بار q با چگالی خطی یکنواخت در $z<<R$ حرکت کند. نشان دهید نیروی الکتراستاتیکی وارد بر الکترون می‌تواند موجب نوسان آن حول مرکز حلقه و با بسامد زاویه‌ای زیر شود:

$$\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}}$$

۷. المان dq

خواننده احتمالا در حل مسائل به این سوال برخورد کرده است که المان dq را چگونه به دست بیاورد و چون ما در بالا، به صورت ضمنی از روی آن گذشتیم و توضیح کافی را ندادیم، اینجا توضیح بیشتری ارائه می‌دهیم. همانطور که مشاهده کردید، برای محاسبه میدان، مکان المان dq را با بردار $\vec{r}'$ نمایش دادیم.

الف) المان طول:

در حالتی که المان dq یک بعدی باشد و لذا طول داشته باشد، اگر طول آن را با dl نمایش دهیم، داریم:

$$dq = \lambda dl$$

برای محاسبه dl توجه می‌کنیم که dl از تغییر کوچک بردار $\vec{r}'$ به دست می‌آید. لذا اگر بردار $\vec{r}'$ را به صورت مولفه‌ای به صورت زیر نمایش دهیم:

$$\vec{r}' = (x', y', z')$$

تغییر دیفرانسیلی آن برابر است با:

$$d\vec{r}' = (dx', dy', dz')$$

پس طول dl برابر خواهد بود با:

$$dl = \sqrt{(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2}$$

برای مثال دایره‌ای که در مثال ۲ تحلیل کردیم در نظر بگیرید. در آنجا داشتیم:

$$\vec{r}' = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

پس با دیفرانسیل گیری خواهیم داشت:

$$d\vec{r}' = (R(-\sin\theta)d\theta, R(\cos\theta)d\theta, 0)$$

پس طول این المان برابر است با:

$$dl = \sqrt{(-R\sin\theta d\theta)^2 + (R\cos\theta d\theta)^2 + (0)^2} = Rd\theta$$

ب)المان سطح

در حالتی که المان dq دارای مساحت باشد و دوبعدی باشد، اگر مساحت کوچک آن را با dS نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$dq = \sigma dS$$

به طوریکه σ چگالی سطحی بار است.

برای محاسبه dS توجه می‌کنیم که dS از تغییر کوچک بردار $\vec{r}'$ در دو راستا به دست می‌آید. در واقع همانطور که تذکر دادیم، برای مشخص کردن بردار $\vec{r}'$ به دو متغیر مستقل از هم نیاز داریم. برای مثال ۳، در حالت دیسک دیدیم که این دو متغیر r و θ بودند. لذا در آن مثال داشتیم:

$$\vec{r}' = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$

و در آن مثال دیدیم که $dS = rdrd\theta$ است.

در حالت کلی بردار $\vec{r}'$ را با دو متغیر مثلا u و v نمایش می‌دهیم:

$$\vec{r}' = (x'(u,v), y'(u,v), z'(u,v))$$

پس اینجا دو نوع دیفرانسیل گیری خواهیم داشت. یک بار می‌توانیم نسبت به u و بار دیگر نسبت به v مشتق بگیریم. لذا دو مشتق زیر را در نظر میگیریم:

$$\frac{\partial\vec{r}'}{\partial u} = (\frac{\partial x'}{\partial u}, \frac{\partial y'}{\partial u}, \frac{\partial z'}{\partial u})$$

$$\frac{\partial\vec{r}'}{\partial v} = (\frac{\partial x'}{\partial v}, \frac{\partial y'}{\partial v}, \frac{\partial z'}{\partial v})$$

از طرفی وقتی دو بردار اضلاع یک متوازی‌الاضلاع را داشته باشیم، مساحت آن از ضرب خارجی اضلاع آن به دست می‌آید. لذا dS را به سادگی به صورت زیر می‌توانیم محاسبه نماییم:

$$dS = \left|\frac{\partial\vec{r}'}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}'}{\partial v}\right| dudv$$

برای همان مثال دیسک توپر داریم:

$$\frac{\partial \vec{r}'}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{r}'}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

لذا از ضرب خارجی این دو بردار به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \vec{r}'}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r)$$

پس طول این بردار برابر با r می‌شود و لذا داریم:

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}'}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \theta} \right| dr d\theta = r dr d\theta$$