اعوذ بالله من الشیطان الرجیم

بسم الله الرحمن الرحیم

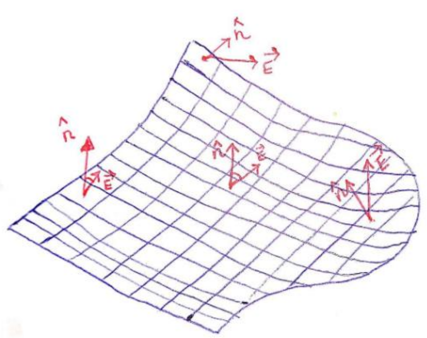
قانون گوس

سید سعید هاشمی-دانشجوی دکتری فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

http://physics.sharif.ir/~seyyedsaeed.hashemi/

میدان الکتریکی، یک میدان برداری است. به این معنا که به هر نقطه از فضا یک بردار نسبت داده شده است. برای محاسبه این میدان، می‌توان از قانون کولن استفاده کرد. گوس ثابت کرد که اگر یک سطح فرضی بسته در فضا در نظر بگیریم، شار عبوری از این سطح برابر کل بار محصور در این سطح تقسیم بر ε_0 خواهد بود. در ادامه به توضیح این مطلب می‌پردازیم.

۱. مفهوم شار

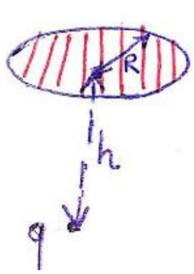


شکل ۱ در هر نقطه از یک سطح، می‌توان یک بردار $\hat{n}$ عمود بر سطح در نظر گرفت.

یک سطح در فضا در نظر بگیرید. مطابق با شکل ۱ در هر نقطه از این سطح، می‌توان بردار یکه عمود بر سطح یعنی $\hat{n}$ را تعریف نمود. از جانبی میدان الکتریکی یعنی $\vec{E}$ در هر نقطه از فضا تعریف شده است. شار عبوری از این سطح به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi = \int \vec{E}.\hat{n}\, dS$$

در واقع با در نظر گرفتن المان مساحت dS روی سطح، با محاسبه ضرب داخلی دو بردار $\hat{n}$ و $\vec{E}$ با انتگرال گیری روی کل سطح، شار به دست می‌آید.



شکل ۲سطح مربوط به مثال ۱

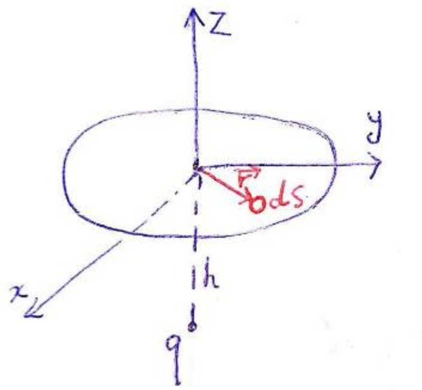
مثال یک- یک بار الکتریکی q مطابق شکل ۲ در نظر بگیرید. شار عبوری از سطح دایروی را به دست بیاورید.

پاسخ. مرکز دایره را مبدا مختصات در نظر بگیرید. مختصات بار q را با $\vec{r}'$ نمایش می‌دهیم.

$$\vec{r}' = (0, 0, -h)$$

می‌خواهیم میدان الکتریکی را در یک نقطه دلخواه $\vec{r}$ روی سطح دایره بیابیم.

$$\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$



شکل ۳ محورهای مختصات مربوط به مثال یک

پس خواهیم داشت:

$$\vec{r}-\vec{r}'=(r\cos\theta, r\sin\theta, h)$$

$$\Rightarrow|\vec{r}-\vec{r}'|=\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2+h^2}=\sqrt{r^2+h^2}$$

پس از قانون کولن داریم:

$$\vec{E}=k\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}q$$

$$\Rightarrow\vec{E}=k\frac{(r\cos\theta, r\sin\theta, h)}{\left(\sqrt{r^2+h^2}\right)^3}q$$

در نقطه فوق المان کوچک dS را در نظر بگیرید. توجه کنید که $dS=rdrd\theta$ است. بردار عمود بر دایره برابر با $\hat{n}=(0,0,1)$ است و لذا ضرب داخلی را به سادگی محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{E}.\hat{n}=\left(\frac{kq}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}(r\cos\theta, r\sin\theta, h)\right).(0,0,1)=\frac{kqh}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

پس شار برابر خواهد بود با:

$$\Phi=\int\vec{E}.\hat{n}dS=\int_0^R\frac{kqh}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}(2\pi rdr)=2\pi kqh\int_0^R\frac{r}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}(2\pi dr)=2\pi kqh\left.\frac{-1}{\sqrt{r^2+h^2}}\right|_0^R=2\pi kqh(\frac{1}{h}-\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}})$$

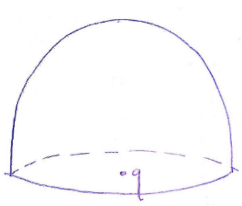
در این مثال مفهوم ضرب داخلی دو بردار $\hat{n}$ و $\vec{E}$ مورد تاکید قرار داشت.

۲. مفهوم قانون گوس

حال اگر یک سطح بسته داشته باشیم، که داخل آن بار q محصور شده باشد، شار کل عبوری از این سطح بسته برابر با $\frac{q}{\varepsilon_0}$ است. با استفاده از این قضیه دیگر لازم نیست که بسیاری از انتگرالها را برای محاسبه شار محاسبه کنیم. مثلا اگر داخل یک سطح بسته، هیچ باری نباشد، شار عبوری از آن صفر است (ولو سطح بسیار پیچیده و دارای انحناهای عجیب باشد). همچنین با توجه به تقارن، می‌توان شار عبوری از سطوح بسته (یا حتی غیربسته) را نیز در مواردی به

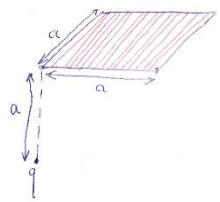
شکل ۴ یک سطح بسته کا داخل آن باری نباشد، شار کل عبوری از سطوح آن صفر است.

سادگی محاسبه نمود. مثلا سطح روی یک کره که داخل آن بار q است، شار عبوری از آن $\frac{q}{\varepsilon_0}$ است. لذا یک نیمکره، شار عبوری از سطح آن برابر با $\frac{q}{2\varepsilon_0}$ است (چرا؟).



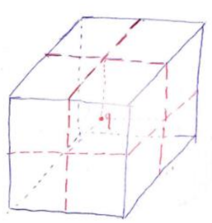
شکل ۵ شار عبوری از سطوح یک نیمکره وقتی که بار در مرکز آن باشد.

مثال دوم- مطابق شکل ۶ شار عبوری از سطح مربع به ضلع a را پیدا کنید (یک بار q در یک راس مربع به انداز ضلع مربع یعنی a پایینتر قرار گرفته است).



شکل ۶ شکل مربوط به مثال دو

پاسخ- یک راه حل دشوار، این است که مشابه سوال یک با محاسبه ضرب داخل $\vec{E}.\hat{n}$ و انتگرال گیری روی کل سطح، شار را محاسبه نمود. اما با استفاده از قانون گوس و توجه به یک تقارن ساده، می‌توان مساله را به سادگی حل نمود. در واقع یک مکعب بزرگ به ضلع $2a$ در نظر بگیرید که q در مرکز آن است. با تقسیم هر سطح به چهار بخش یعنی جمعا ۲۴ مربع کوچک بنا به تقارن مشاهده می‌شود که شار عبوری از هر مربع باهم برابر است. چون مکعب یک حجم بسته است، لذا شار کل عبوری از سطوح آن برابر با $\frac{q}{\varepsilon_0}$ است. پس پاسخ این سوال برابر با $\frac{q}{24\varepsilon_0}$ می‌باشد.



شکل ۷ ایده مربوط به مثال دو

نکته: سطحی که شار را روی آن محاسبه می‌کنیم واقعی نیست و فرضی و ریاضیاتی است.

۳. محاسبه میدان الکتریکی با استفاده از قانون گوس

گاهی اوقات با هوشمندی، می‌توان سطحی را در نظر گرفت که ضرب داخلی $\vec{E}.\hat{n}$ را بتوان به سادگی محاسبه نمود. مثلا برای بار q، اگر سطح فرض کروی به شعاع r را در نظر بگیریم، $\vec{E}$ روی سطح کره در راستای بردار عمود یعنی $\hat{n}$ است و لذا چون بردار $\hat{n}$ طول آن واحد است، پس داریم:

$$\vec{E}.\hat{n} = |\vec{E}|$$

از طرفی اندازه بردار $\vec{E}$ روی این کرده با توجه به تقارن ثابت است. پس شار عبوری از این کره برابر است با:

$$\Phi = \int \vec{E}.\hat{n}\,dS = |\vec{E}|\int dS$$

از طرفی $\int dS$ یعنی جمع همه مساحتهای کوچک dS و لذا برابر با مساحت کل کره یعنی برابر با $4\pi R^2$ می‌شود. پس $\Phi = 4\pi R^2|\vec{E}|$ خواهد بود. از جانبی طبق قانون گوس $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ است و لذا داریم:

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = 4\pi R^2 \left|\vec{E}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{E}\right| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

که همان قانون کولن است. این یک مثال بود که چگونه با استفاده از قانون گوس، میدان الکتریکی را محاسبه نماییم. در حالت کلی استراتژی‌ای که برای محاسبه میدان الکتریکی با استفاده از قانون گوس وجود دارد به صورت زیر است:

مرحله اول: خواص تقارنی توزیع بار الکتریکی را مشخص کنید.

مرحله دوم: جهت بردار میدان الکتریکی را تعیین کنید.

مرحله سوم: مشخص کنید که این توزیع بار، فضا را به چند ناحیه تقسیم می‌کند.

حال برای هر ناحیه:

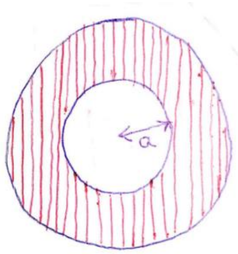
مرحله چهارم: یک سطح گوسی به گونه‌ای انتخاب کنید که اندازه میدان الکتریکی روی بخشهای آن ثابت یا صفر باشد.

مرحله پنجم: شار عبوری از این سطح را پیدا کنید (بر حسب $\left|\vec{E}\right|$ مجهول).

مرحله ششم: بار محصور شده در این سطح گوسی را محاسبه نمایید.

مرحله هفتم: با مساوی قرار دادن دو طرف قانون گوس، رابطه‌ای برای اندازه میدان الکتریکی بیابید.

مثال سوم- یک پوسته کروی که شعاع داخلی آن a و شعاع بیرونی آن b است در نظر بگیرید. اگر چگالی بار در این ناحیه برابر با $\rho = \frac{P}{r}$ باشد (به نحویکه P ثابت و r فاصله تا مرکز است). میدان الکتریکی را در هر نقطه دلخواه بیابید.

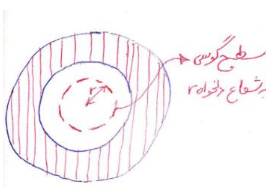


شکل ۸ شکل مربوط به مثال سه

پاسخ:

توزیع بار تقارن کروی دارد. لذا انتظار داریم که جهت میدان الکتریکی در راستای شعاعی باشد. از طرفی این توزیع فضا را به سه ناحیه r<a و b<r<a و b<r تقسیم کرده است.

برای ناحیه r<a



شکل ۹ سطح گوسی برای ناحیه $r<a$

همانطور که گفتیم میدان در راستای شعاعی است و بنا بر تقارن اندازه آن یعنی $\left|\vec{E}\right|$ روی سطح گوسی ثابت است. لذا شار بر حسب $\left|\vec{E}\right|$ برابر است با:

$$\Phi = 4\pi R^2 \left|\vec{E}\right|$$

از طرفی چون بار محصور صفر است، پس شار صفر بوده و لذا در این ناحیه $|\vec{E}|=0$ است.

شکل ۱۰ سطح گوسی برای ناحیه $a<r<b$

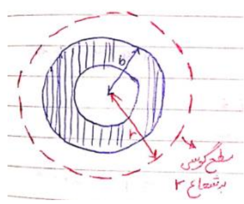
برای ناحیه a<r<b

مشابه استدلال ناحیه قبل به سادگی $\Phi = 4\pi R^2 |\vec{E}|$ است. از جانبی بار محصور برابر است با:

$$q = \int \rho dV = \int_{r=a}^{R} \frac{P}{r}(4\pi r^2)dr = 4\pi P(\frac{R^2}{2} - \frac{a^2}{2})$$

توجه کنید که چون چگالی ثابت نیست، لذا بار برابر چگالی ضربدر حجم نیست. بلکه برابر انتگرال چگالی ضربدر dV است. با استفاده از قانون گوس داریم:

$$4\pi R^2 |\vec{E}| = \frac{4\pi P}{\varepsilon_0}(\frac{R^2}{2} - \frac{a^2}{2}) \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{P}{\varepsilon_0 R^2}(\frac{R^2}{2} - \frac{a^2}{2})$$



شکل ۱۱ سطح گوسی برای ناحیه r>c

در ناحیه b<r

مشابه تحلیل ناحیه‌های قبل شار $\Phi = 4\pi r^2 |\vec{E}|$ است و از طرفی بار الکتریکی محصور فقط در فاصله a<r<b قرار دارد. لذا بار محصور برابر است با:

$$q = \int \rho dV = \int_{r=a}^{b} \frac{P}{r}(4\pi r^2)dr = 4\pi P(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2})$$

لذا بر اساس قانون گوس داریم:

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{4\pi P}{\varepsilon_0}(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}) \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{P}{\varepsilon_0}(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2})\frac{1}{r^2}$$

لذا در هر سه ناحیه میدان به دست آمد:

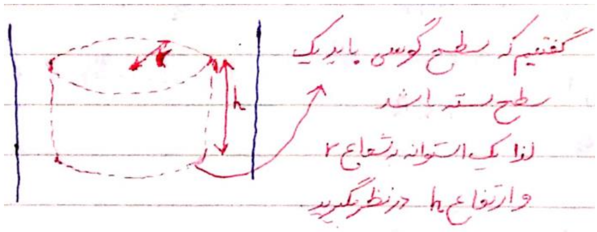
$$|\vec{E}| = \begin{cases} 0 & \text{for}(r<a) \\ \frac{P}{\varepsilon_0}(\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2})\frac{1}{r^2} & \text{for}(a<r<b) \\ \frac{P}{\varepsilon_0}(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2})\frac{1}{r^2} & \text{for}(b<r) \end{cases}$$

مثال چهارم- یک استوانه بی‌نهایت طویل به شعاع R در نظر بگیرید. اگر چگالی بار $\rho = Ar^2$ باشد، میدان را در هر نقطه دلخواه از فضا بیابید.(A ثابت و r فاصله از محور استوانه است)

پاسخ:

چون استوانه بی‌نهایت طویل است، لذا تقارن استوانه‌ای دارد و لذا جهت میدان الکتریکی در راستای شعاعهایی است که بر محور استوانه عمود است. این استوانه فضا را به دو ناحیه r<R و r>R تقسیم کرده است:

الف) ناحیه r<R



شکل ۱۲ سطح گوسی برای ناحیه r<R

توجه کنید که میدان عمود بر سطوح جانبی سطح گوسی و موازی دو قاعده آن است. لذا در دو دایره بالا و پایین(دو قاعده استوانه) میدان بر $\hat{n}$ (بردار عمود بر سطح) عمود است و لذا شار عبوری از این دو سطح صفر است. اما در سطح جانبی اندازه میدان ثابت است و لذا داریم:

$$\Phi = \left|\vec{E}\right|(2\pi rh)$$

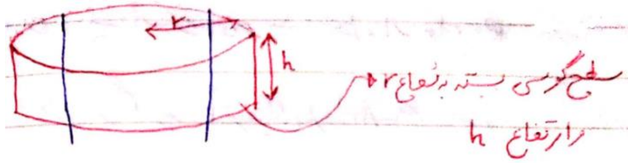
از جانبی بار محصور در این سطح گوسی برابر است با:

$$q = \int \rho dV = \int_{r'=0}^{r} Ar'^2(2\pi r'h)dr' = 2\pi hA\frac{r^4}{4}$$

لذا بر اساس قانون گوس داریم:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{2\pi hAr^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi rh} = \frac{Ar^3}{4\varepsilon_0}$$

ب) ناحیه r>R



شکل ۱۳ سطح گوسی مربوط به ناحیه r>R

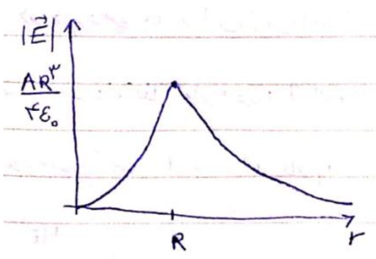
مشابه استدلال ناحیه قبل:

$$\Phi = \left|\vec{E}\right|(2\pi rh)$$

$$q = \int \rho dV = \int_{r'=0}^{R} Ar'^2(2\pi r'h)dr' = 2\pi hA\frac{R^4}{4}$$

و لذا بر اساس قانون گوس داریم:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{2\pi hAR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi rh} = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$



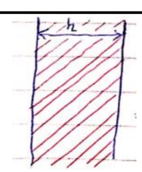
شکل ۱۴ رسم نمودار میدا الکتریکی بر حسب شعاع

لذا در هر دو ناحیه میدان الکتریکی به دست آمد:

$$\left|\vec{E}\right| = \begin{cases} \dfrac{Ar^3}{4\varepsilon_0} & \text{for}(r<R) \\ \dfrac{AR^4}{4\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & \text{for}(r<R) \end{cases}$$

مثال پنجم- یک پاره خط به طول L و چگالی λ تقارن ندارد و لذا با قانون گوس نمی‌توان میدان آن را محاسبه نمود. یک استوانه با ارتفاع محدود نیز تقارن ندارد.

تمرین یک- یک صفحه بی‌نهایت در نظر بگیرید که دارای ضخامت h است. اگر چگالی بار حجمی در این بخش ρ باشد، میدان الکتریکی را در هر نقطه دلخواه از فضا بیابید.



شکل ۱۵ شکل مربوط به تمرین ۱

۴. کشف توزیع بار از روی میدان الکتریکی

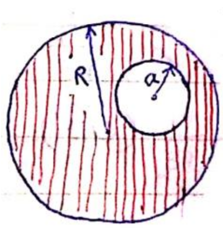
اگر میدان الکتریکی را داشته باشیم، از روی قانون گوس می‌توان چگالی بار را به دست آورد. توجه کنید که چگالی بار، از نظر ریاضی، یک تابع است که به هر نقطه از فضا، یک عدد نسبت می‌دهد. پس کشف چگالی بار، یعنی پیدا کردن مقدار این تابع در هر نقطه از فضا.

تمرین دو- یک توزیع بار کروی که چگالی بار فقط تابع شعاع است را در نظر بگیرید. اگر میدان در راستای شعاعی $\vec{E} = kr^4\hat{r}$ باشد، چگالی بار در هر نقطه از فضا را بیابید.(k ثابت و r فاصله تا مرکز است)

۵. اصل برهم‌نهی

گاهی کل مجموعه تقارن ندارد. ولی اگر چیزی از آن کم یا چیزی به آن اضافه شود، تقارن خواهد داشت.

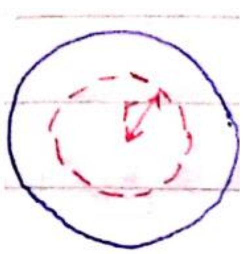
مثال ششم. یک کره بزرگ به شعاع R با چگالی بار یکنواخت ρ در نظر بگیرید. یک کره کوچکتر به شعاع a از آن خارج می‌کنیم. میدان را داخل این کره کوچک پیدا کنید.



شکل ۱۶ شکل مربوط به مثال ۶

پاسخ:

این توزیع تقارن ندارد. اما اگر کره کوچک به شعاع a به آن اضافه شود، تقارن خواهد داشت.

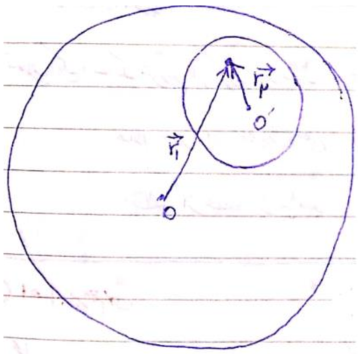

شکل ۱۷ سطح گوسی برای محاسبه میدان یک کره توپر

لم. یک کره توپر به چگالی ρ میدان داخل آن در نقطه $\vec{r}$ برابر با $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$ است.

اثبات: توجه کنید که بر اساس قانون گوس داریم:

$$\left|\vec{E}\right| 4\pi r^2 = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3)\frac{1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \left|\vec{E}\right| = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

و لذا با در نظر گرفتن جهت میدان الکتریکی به سادگی $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$ به دست می‌آید.



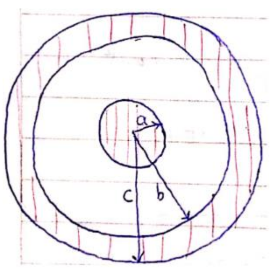
شکل ۱۸ استفاده از اصل برهمنهی در حل مساله کره توخالی

لذا اگر کره کاملا توپر بود، میدان در نقطه دلخواه مطابق … برابر با $\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1$ بود. بخشی از این میدان که ناشی از کره کوچک است، برابر با $\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$ است. پس بنا به اصل برهمنهی میدان مجهول (که مورد سوال واقع شده) در صورت جمع برداری با $\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$ برابر میدان کل یعنی $\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1$ می‌شود. لذا داریم:

$$\vec{E}+\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 \Rightarrow \vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}$$

۶. رسانا و نارسانا

رسانا موجودی است که بار الکتریکی می‌تواند در آن جریان پیدا کند و حرکت کند. لذا اگر میدان الکتریکی داخل آن صفر نباشد، به بارها نیرو وارد شده و بارها را به حرکت در می‌آورد تا وقتی که بارها به وضعیتی برسند که تعادل باشد، یعنی از حرکت بایستند. پس در حالت تعادل، میدان الکتریکی داخل رسانا صفر است (بعدا هم انشاالله در قانون اهم خواهیم دید که رابطه بین جریان داخل رسانا و میدان الکتریکی داخل آن وجود دارد). از جانبی طبق قانون گوس اگر یک سطح گوسی کوچک داخل رسانا در نظر بگیریم، بار نیز داخل رسانا صفر خواهد بود. لذا در حالت تعادل بار فقط بر روی سطوح رسانا جمع می‌شود.

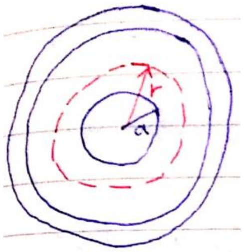


شکل ۱۹ شکل مربوط به مثال۷

مثال هفتم- یک کره رسانا به شعاع a و با +q و یک پوسته رسانا به شعاع داخلی b و شعاع خارجی c و بار q− در نظر بگیرید. در ناحیه بین این دو کره و خارج خلا وجود دارد. میدان را در یک نقطه دلخواه در فضا بیابید. چه بخشی از بار روی سطح r=b جمع شده است؟

پاسخ:

توزیع بار تقارن کروی دارد و در راستای شعاعی است. فضا به چهار ناحیه r<a و a<r<b و b<r<c و c<r تقسیم شده است.



شکل ۲۰سطح گوسی برای ناحیه a<r<b

الف) ناحیه r<a

داخل این ناحیه رسانا است و لذا میدان صفر است.

ب)ناحیه a<r<b

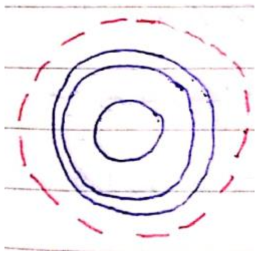
چون شار برابر با $\Phi=|\vec{E}|4\pi r^2$ و بار محصور q است، لذا به سادگی با استفاده از قانون گوس میدان به صورت زیر است:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

ج) ناحیه b<r<c

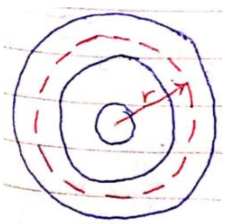
این بخش هم رسانا است و لذا میدان صفر است.

د) ناحیه c<r



شکل ۲۱ سطح گوسی برای ناحیه r>c

چون شار برابر با $\Phi = \left|\vec{E}\right| 4\pi r^2$ است، ولی بار محصور داخل سطح گوسی صفر است، لذا با استفاده از قانون گوس، میدان در این ناحیه نیز صفر است.



شکل ۲۲ سطح گوسی برای ناحیه b<r<c

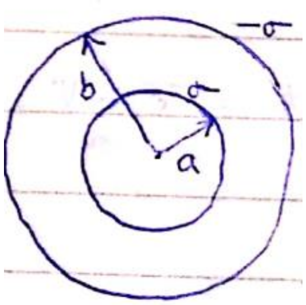
برای محاسبه بخشی از بار که روی سطح r=b جمع شده، ناحیه b<r<c را که رسانا بود و لذا میدان داخل آن صفر بود را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن یک سطح گوسی داخل این ناحیه، توجه می‌کنیم که چون، میدان داخل این ناحیه صفر است، لذا شار عبوری از این سطح صفر خواهد بود. پس طبق قانون گوس، بار محصور در این ناحیه صفر است. بار روی کره به شعاع a برابر با q+ بود. لذا بار قرار گرفته روی سطح r=b برابر با q– خواهد بود. توجه کنید که چون کل بار این پوسته کروی برابر با q– بود، بار جمع شده روی سطح r=c صفر است.

۷. قانون دوم نیوتون

بعد از اینکه میدان الکتریکی را یافتیم، می‌توانیم نیروی وارد بر یک بار که در این میدان قرار گرفته را پیدا نماییم. لذا با استفاده از قانون دوم نیوتون، می‌توانیم حرکت آن را تحلیل کنیم.

تمرین ۳- دو پوسته بار کروی، یکی با شعاع a و چگالی سطحی σ و دیگری به شعاع b و چگالی سطحی σ– در نظر بگیرید. ثابت کنید میدان به صورت زیر است:

$$\left|\vec{E}\right| = \begin{cases} 0 & \text{for}(r < a) \\ \dfrac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2} & \text{for}(a < r < b) \\ \dfrac{\sigma(a^2 - b^2)}{\varepsilon_0 r^2} & \text{for}(b < r) \end{cases}$$



شکل ۲۳ شکل مربوط به تمرین ۳

مثال هشتم- با توجه به تمرین سه فرض کنید که ذره‌ای به جرم m و بار مثبت q در ابتدا روی سطح کره داخلی قرار گرفته و در اثر نیروی دافعه کره به خارج پرتاب می‌شود و تحت نیروی الکتریکی شتاب می‌گیرد.

الف) سرعت ذره هنگام رسیدن به کره دوم چقدر است؟

ب) فرض کنید که بر روی کره دوم سوراخ کوچکی وجود دارد (که تاثیری روی میدان ایجاد نمی‌کند و فقط اجازه عبور ذره را می‌دهد). این ذره حداکثر تا چه فاصله‌ای می‌تواند دور شود؟

پاسخ:

قسمت الف) فرض کنید که سرعت ذره v باشد، لذا شتاب ذره برابر با مشتق زمانی سرعت خواهد بود.

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}=v\frac{dv}{dr}$$

از جانبی از نتیجه نهایی تمرین ۳ میدان الکتریکی را داریم، لذا نیرو را به سادگی می‌توانیم به دست بیاوریم:

$$F=qE=q\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

پس داریم:

$$q\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}=mv\frac{dv}{dr}\Rightarrow\frac{q}{m}\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}dr=vdv\Rightarrow\int_{r=a}^{b}\frac{q}{m}\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}dr=\int_{0}^{v}vdv$$

$$\Rightarrow\frac{q}{m}\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})=\frac{v^2}{2}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2q}{m}\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}$$

قسمت ب) سرعتی که ذره، کره دوم را ترک می‌کند محاسبه نمودیم. می‌خواهیم ببینیم که در چه فاصله‌ای سرعت صفر می‌شود. از روی پاسخ نهایی تمرین ۳ میدان الکتریکی در ناحیه r>b داده شده است. لذا نیروی وارد بر ذره را داریم.

$$F=qE=q\frac{\sigma(a^2-b^2)}{\varepsilon_0 r^2}$$

پس داریم:

$$q\frac{\sigma(a^2-b^2)}{\varepsilon_0 r^2}=mv\frac{dv}{dr}\Rightarrow\frac{q}{m}\frac{\sigma(a^2-b^2)}{\varepsilon_0 r^2}dr=vdv\Rightarrow\int_{r=b}^{r_{max}}\frac{q}{m}\frac{\sigma(a^2-b^2)}{\varepsilon_0 r^2}dr=\int_{v_b}^{0}vdv$$

$$\Rightarrow\frac{q}{m}\frac{\sigma(a^2-b^2)}{\varepsilon_0}(\frac{1}{b}-\frac{1}{r_{max}})=-\frac{v_b^2}{2}$$

به طوریکه v_b سرعت ترک کردن کره دوم توسط ذره است که در قسمت الف، محاسبه کردیم. لذا با جایگذاری v_b داریم:

$$\Rightarrow\frac{q}{m}\frac{\sigma(a^2-b^2)}{\varepsilon_0}(\frac{1}{b}-\frac{1}{r_{max}})=\frac{q}{m}\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})\Rightarrow\frac{(a^2-b^2)}{\varepsilon_0}(\frac{1}{b}-\frac{1}{r_{max}})=\frac{a^2}{\varepsilon_0}(\frac{a-b}{ab})$$

$$\Rightarrow(a+b)(\frac{1}{b}-\frac{1}{r_{max}})=(\frac{a}{b})\Rightarrow\frac{1}{r_{max}}=\frac{1}{b}-\frac{a}{b(a+b)}\Rightarrow\frac{1}{r_{max}}=\frac{1}{a+b}\Rightarrow\boxed{r_{max}=a+b}$$

یعنی به فاصله a از کره دوم دور می‌شود (در فاصله a+b از مرکز).

۸. چه اتفاقی دارد می‌افتد؟

تا اینجا برای محاسبه میدان، با بارهای ساکن سر و کار داشتیم. لذا به این مباحث الکترواستاتیک گفته می‌شود. اگر بارها حرکت کنند، علاوه بر میدان الکتریکی میدان مغناطیسی هم خواهیم داشت که در فصلهای بعد به آن خواهیم پرداخت. ما از قانون کولن شروع کردیم. یعنی نیروی بین دو بار الکتریکی که ساکن هستند را بیان کردیم. سپس یک تعبیر ریاضیاتی کردیم که گویا هر بار الکتریکی، یک میدان الکتریکی در فضا ایجاد می‌کند و این میدان، روی سایر بارها اثر می‌گذارد و باعث اعمال نیرو بر آنها می‌شود. قانون گوس یک فرمول ریاضی برای این میدان ریاضی به دست داد که در مواردی که تقارن وجود داشت، توانستیم با آن از شر حل انتگرالهای پیچیده‌ای که در قانون کولن ظاهر می‌شود، رهایی پیدا کنیم. اگرچه قانون گوس از روی قانون کولن به دست می‌آید که در حالت سکون بارها برقرار است، اما با آزمایش ثابت شده است که در حالت کلی که بارها در حال حرکت هستند نیز، قانون گوس برقرار است.