اعوذ بالله من الشیطان الرجیم

بسم الله الرحمن الرحیم

پتانسیل الکتریکی

سید سعید هاشمی-دانشگاه صنعتی شریف

۱. مقدمه

در فصلهای گذشته با مفهوم بار الکتریکی آشنا شدیم و فهمیدیم که بار الکتریکی یک میدان الکتریکی در فضا ایجاد میکند که این میدان، توسط سایر بارها احساس شده و به آنها نیرو وارد می‌شود. در این فصل با مفهوم پتانسیل الکتریکی آشنا خواهیم شد. در واقع پتانسیل الکتریکی، چیز جدایی از میدان الکتریکی نیست. با داشتن پتانسیل الکتریکی میتوانیم، میدان را به دست بیاوریم، و برعکس، با داشتن میدان الکتریکی، می‌توان پتانسیل الکتریکی را محاسبه نمود.

۲. تعریف ریاضی پتانسیل الکتریکی برای بار نقطه‌ای

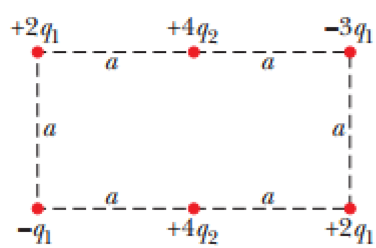
برای یک بار نقطه‌ای به بار q، پتانسیل در فاصله R از آن برابر با $\frac{kq}{R}$ می‌باشد. در واقع پتانسیل بردار نیست (برخلاف میدان الکتریکی که برداری است). برای اینکه فاصله R را به دست بیاوریم، می‌توانیم از قضیه فیثاغورث استفاده نماییم. در واقع اگر محورهای مختصات را رسم کنیم و مکان بار را با $\vec{r}'$ و مکانی که قرار است در آنجا پتانسیل را محاسبه کنیم، با $\vec{r}$ نمایش دهیم، داریم:

$$V(\vec{r}) = \frac{kq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

به طوریکه $V(\vec{r})$ به معنای پتانسیل در نقطه $\vec{r}$ است و $|\vec{r} - \vec{r}'|$ به معنای طول بردار $\vec{r} - \vec{r}'$ است.

اگر چند بار نقطه‌ای وجود داشت، پتانسیل کل، برابر با جمع همه این پتانسیلها خواهد بود.

مثال ۱. در پیکربندی شکل زیر a=۳۹/۰cm و $q_1 = 3.40pc$ و $q_2 = 6.00pc$ و هستند. پتانسیل را در مرکز مستطیل بیابید.



پاسخ. با یک تحلیل ذهنی، متوجه میشویم که چهار باری که در رئوس مستطیل قرار دارند، چون فاصله آنها تا مرکز باهم برابر است، و چون جمع کل این چهار بار صفر است، لذا پتانسیل ناشی از این بارها در مرکز کلا صفر خواهد شد و فقط دو باری که در وسط اضلاع هستند مهم خواهند بود.

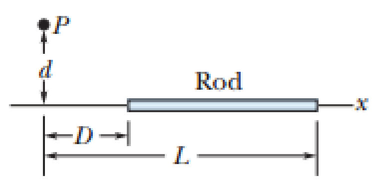
$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q_2}{a/2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q_2}{a/2}=\frac{16q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{16(8.99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(6.00\times10^{-12}\ \mathrm{C})}{0.39\ \mathrm{m}}$$
$$=2.21\ \mathrm{V}.$$

۳. پتانسیل الکتریکی ناشی از یک توزیع پیوسته بار

اگر یک المان کوچک dq از این توزیع را که در مکان دلخواه $\vec{r}'$ واقع شده را در نظر بگیرید، پتانسیل ناشی از این المان در مکان $\vec{r}$ برابر با $\frac{kdq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ خواهد بود. لذا پتانسیل کل، برابر با جمع همه پتانسیلهای ایجاد شده توسط همه این المانهای کوچک خواهد بود (که در حالت حد دیفرانسیلی، جمع به انتگرال تبدیل میشود).

$$V(\vec{r})=\int\frac{kdq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

مثال۲. مطابق شکل زیر، یک میله باریک با چگالی بار یکنواخت $\lambda=2.00\mu c/m$ را در نظر بگیرید. اگر $d=D=L/4.00$ باشد، پتانسیل الکتریکی را در نقطه P محاسبه نمایید.



پاسخ. یک المان در نقطه دلخواه $\vec{r}'=(x,0)$ در نظر بگیرید. مکانی که قرار است پتانسیل را در آن حساب کنیم، (یعنی نقطه P)مختصات آن $\vec{r}=(0,d)$ است. لذا با توجه به اینکه $\vec{r}-\vec{r}'=(-x,d)$ و لذا طول آن برابر با $|\vec{r}-\vec{r}'|=\sqrt{(-x)^2+d^2}=\sqrt{x^2+d^2}$ است. لذا داریم:

$$V=\int\frac{kdq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\int\frac{k\lambda dx}{\sqrt{x^2+d^2}}=k\lambda\int_D^L\frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}}=k\lambda\ln(\sqrt{x^2+d^2}+x)\Big|_D^L=k\lambda(\ln\frac{\sqrt{L^2+d^2}+L}{\sqrt{D^2+d^2}+D})$$

مثال ۳. ثابت کنید که پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای روی محور مرکزی یک حلقه نازک (به بار q و شعاع R) و در فاصله z از این حلقه برابر است با $V=\frac{kq}{\sqrt{z^2+R^2}}$ است.

پاسخ. با انتخاب یک المان در مختصات $\vec{r}'=(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$ و با توجه به اینکه بردار مکان $\vec{r}=(0,0,z)$ است، لذا $\vec{r}-\vec{r}'=(-R\cos\theta, -R\sin\theta, z)$ است و طول آن

$$\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|=\sqrt{(-R\cos\theta)^2+(-R\sin\theta)^2+(z)^2}=\sqrt{R^2+z^2}$$

پس خواهیم داشت:

$$V=\int\frac{kdq}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}=k\int\frac{kdq}{\sqrt{R^2+z^2}}=\frac{k}{\sqrt{R^2+z^2}}\int dq=\frac{kq}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

مثال ۴. پوسته‌ای به شکل نیمکره در نظر بگیرید که شعاع آن R و چگالی بار سطحی آن σ باشد. پتانسیل الکتریکی را در مرکز آن محاسبه نمایید.

پاسخ

یک المان dq را در نظر بگیرید. فاصله این المان تا مرکز نیمکره برابر با R است. لذا پتانسیل حاصل از این المان برابر با $\frac{kdq}{R}$ می‌باشد. پس پتانسیل کل برابر است با:

$$V=\int\frac{kdq}{R}=\frac{k}{R}\int dq$$

توجه کنید که $\int dq$ برابر جمع همه این المانهای بار خواهد بود و لذا برابر با کل بار نیمکره است. پس $\int dq=\sigma(2\pi R^2)$ است و لذا پتانسیل را خواهیم داشت:

$$V=\frac{k\sigma(2\pi R^2)}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(2\pi R^2)}{R}=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

تمرین۱ سوال ۳۱ فصل ۲۴

۴. محاسبه میدان الکتریکی از روی پتانسیل

گفتیم که میدان الکتریکی در هر نقطه یک بردار است، به این معنا که دارای سه مولفه می‌باشد، لذا برای محاسبه آن با استفاده از قانون کولن، باید سه انتگرال مختلف را محاسبه نماییم. اما پتانسیل بردار نیست و لذا برای محاسبه آن، تنها یک انتگرال را باید به دست بیاوریم. می‌توان ثابت کرد که مشتقات جزئی پتانسیل، میدان الکتریکی را به دست می‌دهد:

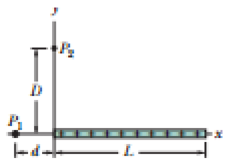
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

مثال۵. (مساله ۴۰ فصل ۲۴ هالیدی) میله‌ی پلاستیکی نازک شکل زیر، دارای طول L=۱۰,۰cm و چگالی خطی بار $\lambda = cx$ است، که در آن $c = 49.9 pc/m^2$ است.

الف) به ازای V=۰ در بی‌نهایت، پتانسیل الکتریکی در نقطه P_2 روی محور y واقع در y=D=۳,۵۶cm چقدر است؟

ب) مولفه E_y میدان الکتریکی در نقطه P_2 چیست؟

ج) چرا مولفه E_x میدان در نقطه P_2 را نمی‌توان با استفاده از نتیجه قسمت الف به دست آورد؟



۵. محاسبه پتانسیل از روی میدان الکتریکی

در فصلهای قبل یاد گرفتیم که اگر توزیع بار الکتریکی، تقارن داشت، میدان الکتریکی را می‌توانیم به سادگی با قانون گوس محاسبه کنیم. پس گاهی از اوقات، محاسبه میدان الکتریکی از پتانسیل ساده‌تر هست. لذا ابتدا با قانون گوس، میدان را محاسبه می‌نماییم و از روی میدان پتانسیل را به دست می‌آوریم. می‌توان نشان داد که پتانسیل از انتگرال گیری میدان الکتریکی روی یک مسیر به دست می‌آید:

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E}.d\vec{l}$$

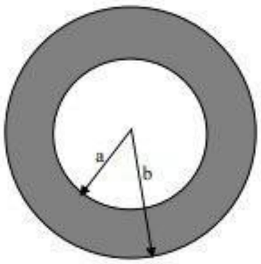
در واقع حاصل این انتگرال مستقل از مسیر است و با انتخاب هوشمندانه یک مسیر، انتگرال فوق را به سادگی می‌توان محاسبه نمود. توجه کنید که با محاسبه این انتگرال اختلاف پتانسیل بین دو نقطه به دست می‌آید. لذا مثلا اگر در ابتدا به شما بگویند که مثلا در بی‌نهایت، پتانسیل صفر است، لذا با رسم یک مسیر از بی‌نهایت تا نقطه مد نظر، می‌توان پتانسیل نقطه مورد نظر را به دست آورد. (یا ممکن است پتانسیل نقطه دیگری غیر از بی‌نهایت را به شما بدهند که باز هم با رسم مسیر از نقطه فوق به نقطه دلخواه دیگر میتوان پتانسیل را محاسبه نمود.)

مثال ۶.

1. یک پوسته کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b، که ناحیه بین دو پوسته ($a<r<b$) با توزیع حجمی بار $\rho=P/r$ پر شده است، را در نظر بگیرید. P عددی ثابت و فاصله شعاعی از مرکز پوسته r است.

الف) میدان الکتریکی در ناحیه داخلی ($r<a$) ، داخل پوسته ($a<r<b$) و خارج آن ($r>b$) را محاسبه کنید.

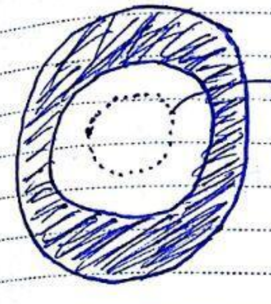
ب) پتانسیل الکتریکی مربوط به نواحی ذکر شده در قسمت الف را بدست آورید.



پاسخ.

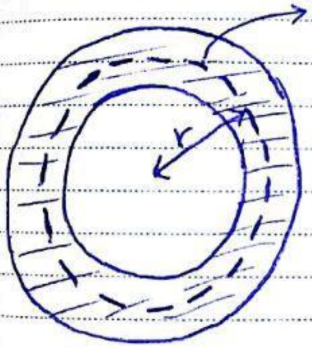
در این مثال، محاسبه میدان الکتریکی به سادگی با قانون گوس میسر بوده و لذا از روی میدان، می‌توان پتانسیل را محاسبه نمود.

بنا به تقارن، میدان $\vec{E}$ در راستای شعاعی است. لذا سطح گوسی را کروی می‌گیریم:



$$\Rightarrow \int \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{q_{\text{محصور}}}{\varepsilon_0} = 0$$

$\Rightarrow$ داخل $r<a$ صفر است $\vec{E}=0$



برای ناحیه $a<r<b$:

$$\int \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{q_{\text{محصور}}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow |E|\,4\pi r^2 = \frac{q_{\text{محصور}}}{\varepsilon_0}$$

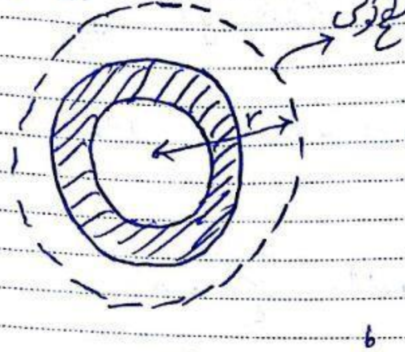
$\Leftarrow$ حال محاسبه $q_{\text{محصور}}$:

$$q_{\text{محصور}} = \int \rho\,dV = \int_{r=a}^{r} \frac{P}{r}\,(4\pi r^2)\,dr$$

$$\Rightarrow q = 4\pi P\int_a^r r\,dr \Rightarrow q_{\text{محصور}} = 4\pi P\left(\frac{r^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{4\pi P\left(\frac{r^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)}{4\pi r^2\varepsilon_0}}$$

برای ناحیه : $b<r$



$$\Rightarrow \int \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA = |E|\, 4\pi r^2$$

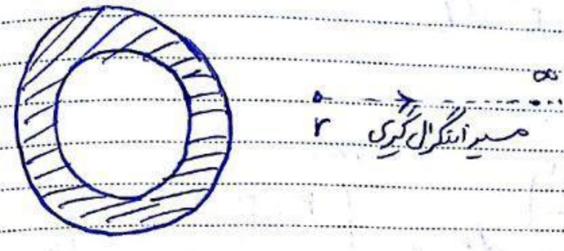
$$q_{\text{محصور}} = ?$$

$$q_{\text{محصور}} = \int \rho\, dv = \int_a^b \frac{\rho}{r}\left(4\pi r^2\right) dr = 4\pi\rho\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{4\pi\rho\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow |E| = \begin{cases} 0 & r<a \\ \dfrac{\rho\left(\frac{r^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)}{r^2\varepsilon_0} & a<r<b \\ \dfrac{\rho\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)}{r^2\varepsilon_0} & b<r \end{cases}$$

ب) اگر سؤال چیزی نگفته باشد، پتانسیل در بی‌نهایت صفر است.



پتانسیل خارج از کره:

$$V_r = +\int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

توجه کنید که چون $\vec{E}$ در بیرون $r>b$ است، لذا $\vec{E}$ در خارج کره را جایگزین می‌کنیم:

$$V_r = \int_r^{\infty} \frac{\rho\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)}{r^2\varepsilon_0}\,dr = \frac{\rho\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)}{\varepsilon_0 r}$$

برای $a<r<b$:

$$V_r = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

برای محاسبه این انتگرال، $\vec{E}$ در بخش $r<b$ با $b<r$ با هم متفاوت است

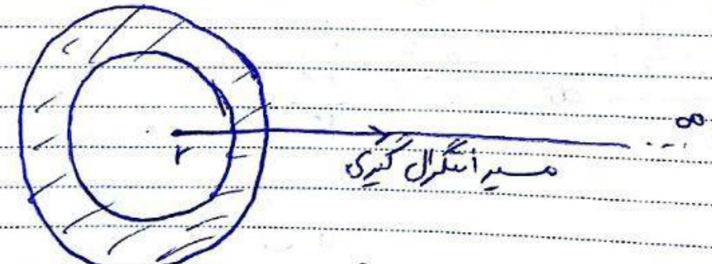
لذا برای محاسبه انتگرال، آن را به دو بخش تقسیم می‌کنیم:

$$V_r = \int_r^b \vec{E}\cdot dl + \int_b^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow V_r = \int_r^b \frac{\rho\left(\frac{r^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)}{r^2\varepsilon_0}\,dr + \int_b^\infty \frac{\rho\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)}{r^2\varepsilon_0}\,dr$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(b-r) - \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right) + \frac{\rho\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}\right)$$

برای محاسبه پتانسیل داخل $r<a$ داریم:



$$V_r = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^a \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_b^\infty \vec{E}\cdot dl$$

$$= 0 + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(b-a) - \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{\rho\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)}{\varepsilon_0 b}$$

همان قسمت قبلی هست که به جای r ، a را قرار دهید.

دیدی که یار جز سر جور و ستم نداشت بشکست عهد وز غم ما هیچ غم نداشت

۶. انرژی پتانسیل

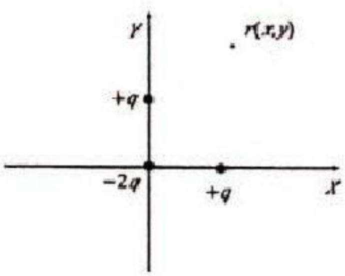
همانطور که گفته شد، پتانسیل الکتریکی، مربوط به نقاط فضا است و در هر نقطه از فضا تعریف می‌شود. مفهوم دیگری به نام انرژی پتانسیل الکتریکی وجود دارد که مربوط به پیکربندی بارهای ما است. یعنی اینگونه نیست که در هر نقطه از فضا تعریف شود. بلکه به فاصله بارها از یکدیگر و شکل و توزیع هندسی بارها بستگی دارد. در واقع انرژی پتانسیل الکتریکی، انرژی ذخیره شده در یک مجموعه بار است و لذا عددی است که به وضعیت بارها بستگی دارد. برای دو بار نقطه‌ای که در فاصله R از یکدیگر قرار دارند، انرژی پتانسیل الکتریکی این توزیع برابر با $\frac{kq_1q_2}{R}$ است. در صورتی که چند بار داشته باشیم، انرژی پتانسیل برابر جمع روی همه این زوجها خواهد بود.

مثلا اگر سه بار q_1 و q_2 و q_3 را که به ترتیب در مکانهای $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ و $\vec{r}_3$ قرار گرفته‌اند در نظر بگیریم، انرژی پتانسیل ذخیره شده در این توزیع برابر است با:

$$\frac{kq_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}+\frac{kq_1q_3}{|\vec{r}_1-\vec{r}_3|}+\frac{kq_2q_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|}$$

و به همین ترتیب، باید تمام زوج بارها را در نظر بگیریم.

مثال۷. سوال میانترم سال ۹۷-۹۸ دانشگاه شریف



سوال ۶) دو بار $+q$ و یک بار $-2q$ بصورت شکل زیر قرار دارند. فاصله بار منفی از هرکدام از بارهای مثبت a است.

الف) انرژی پتانسیل این آرایش بار را حساب کنید.

ب) پتانسیل الکتریکی ناشی از این آرایش را در نقطه‌ای از فضا به مختصات $r(x,y)$ به دست آورید.

ج) راستا و اندازه دو قطبی الکتریکی مجموعه را بیابید.

د) پتانسیل الکتریکی برای فواصل دور ($r \gg a$) چگونه است؟

پاسخ.

الف)

$$U=\frac{kq_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}+\frac{kq_1q_3}{|\vec{r}_1-\vec{r}_3|}+\frac{kq_2q_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|}=\frac{kq(-2q)}{a}+\frac{kq(-2q)}{a}+\frac{k(q)(q)}{a\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{4kq^2}{a}+\frac{kq^2}{a\sqrt{2}}=\frac{kq^2}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-4\right)$$

ب) همانطور که گفتیم، انرژی پتانسیل یک عدد است که به توزیع بار بستگی دارد، ولی پتانسیل الکتریکی در هر نقطه از فضا به دست می‌آید. مطابق شکل بار اول که ۲q- است در مکان $\vec{r}_1=(0,0)$ قرار گرفته است و بار دوم به بار q در مکان $\vec{r}_2=(a,0)$ و بار سوم q در مکان $\vec{r}_3=(0,a)$ قرار گرفته است. لذا برای محاسبه پتانسیل الکتریکی در نقطه $\vec{r}=(x,y)$ داریم:

$$|\vec{r}-\vec{r}_1| = |(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$|\vec{r}-\vec{r}_2| = |(x,y)-(a,0)| = |(x-a,y)| = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$$
$$|\vec{r}-\vec{r}_3| = |(x,y)-(0,a)| = |(x,y-a)| = \sqrt{x^2+(y-a)^2}$$

پس داریم:

$$V(\vec{r}) = \frac{kq_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{kq_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} + \frac{kq_3}{|\vec{r}-\vec{r}_3|} = \frac{k(-2q)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{kq}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} + \frac{kq}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}$$

توجه کنید که در این قسمت، پتانسیل به صورت تابعی از x و y به دست آمد. ولی برای انرژی پتانسیل، خبری از x و y نیست.

ج) توضیح. اگر n بار نقطه‌ای داشته باشیم که q_1 در مکان $\vec{r}_1$ و q_2 در مکان $\vec{r}_2$ و به همین ترتیب q_n در مکان $\vec{r}_n$ باشند، آنگاه منظور از دوقطبی این توزیع $\vec{P} = q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2 + ... + q_n\vec{r}_n$ می‌باشد. لذا داریم:

$$\vec{P} = -2q(0,0) + q(a,0) + q(0,a) = qa(1,1)$$

پس راستای این دوقطبی در راستای ۴۵ درجه و نیمساز ربع اول بوده و اندازه آن برابر با $qa\sqrt{2}$ خواهد بود.

د) توضیح. برای فواصل دور از یک توزیع بار، اگر بار کل (یعنی $Q = q_1 + q_2 + ... + q_n$ جمع همه بارها) را در نظر بگیریم، در تقریب اول، پتانسیل برابر با $\frac{kQ}{r}$ خواهد بود. به صورت دقیقتر پتانسیل یک توزیع بار را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V \approx \frac{kQ}{r} + k\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^3}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، جمله اول به صورت $\frac{1}{r}$ تغییر می‌کند و جمله دوم به صورت $\frac{1}{r^2}$ (با ساده سازی r صورت با یک r مخرج به صورت $\frac{1}{r^2}$ به دست می‌آید.) جملات بعدی نیز به صورت توانهای بعدی ظاهر خواهند شد و لذا برای این سوال که در فواصل دور را خواسته است، چون بار کل صفر است، لذا جمله اول صفر بوده و اولین تقریب، همان جمله اول خواهد بود. پس داریم:

$$V \approx \frac{kQ}{r} + k\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^3} = 0 + k\frac{(aq,aq).(x,y)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = k\frac{aqx+aqy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = kaq\frac{x+y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

تمرین۲. میدان الکتریکی یک دوقطبی را در یک نقطه دلخواه (x,y) از روی پتانسیل آن به دست بیاورید.

تمرین۳. سوال ۸۸ فصل ۲۴ هالیدی

توجه کنید که بر اساس قانون پایستگی انرژی، انرژی پتانسیل می‌تواند به انرژی جنبشی تبدیل شود. اما دقت می‌کنیم که انرژی پتانسیل مربوط به مجموعه بارهای ماست (نه اینکه مثلا برای هر کدام جدا جدا باشد! به مثال زیر مراجعه نمایید!)

مثال۸. میانترم سال ۹۵-۹۶ دانشگاه شریف

دو بار q+ در نظر بگیرید که در فاصله بسیار زیاد از یکدیگر قرار گرفته‌اند(در حالت سکون). یکی از این بارها را با سرعت V به سمت بار دیگر پرتاب میکنیم. کمترین فاصله دو بار از یکدیگر را بیابید.

پاسخ.

سوال ۱ سال ۹۴
@haliday2

انرژی کل مجموعه در لحظه اول $= \frac{1}{2}mv^2$

انرژی کل در لحظه نهایی $= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv''^2 + \frac{kq^2}{r}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv''^2 + \frac{kq^2}{r}}$ پایستگی انرژی ①

نکته اول. توجه کنید که با نزدیک شدن دو بار به یکدیگر، بار دوم نیز حرکت می‌کند و لذا سرعت پیدا می‌کند.

نکته دوم. انرژی را برای کل مجموعه می‌نویسیم یعنی $\frac{kq^2}{r}$ برای هر دو بار با هم هست.

$\boxed{mv = mv' + mv''}$ ② ⇐ پایستگی تکانه:

سوال. در چه هنگامی، دو بار کمترین فاصله را از هم دارند؟

$x_1 =$ مکان بار اول $\qquad x_2 =$ مکان بار دوم

$x = x_2 - x_1 \rightarrow$ باید کمینه شود

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{v' = v''} \quad ③$$

② و ③ $\Rightarrow v = 2v' = 2v'' \xrightarrow{①} \frac{1}{4}mv^2 = \frac{kq^2}{r_{min}} \Rightarrow \boxed{r_{min} = \frac{4kq^2}{mv^2}}$