اعوذ بالله من الشیطان الرجیم

بسم الله الرحمن الرحیم

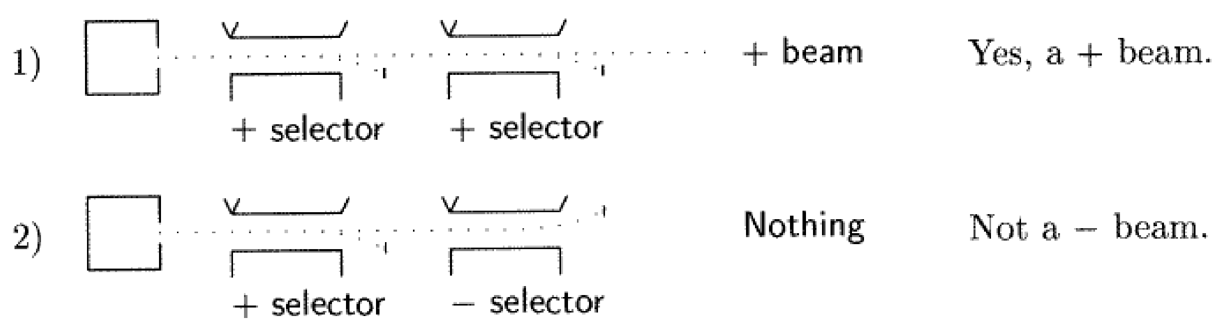
جلسه سوم مکانیک کوانتومی

سید سعید هاشمی دانشجوی دکتری فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

در این جلسه می‌خواهیم دوباره نمادهای برا و کت را تعریف کنیم و راجع به خواص آنها گفت و گو کنیم، لذا نیازی به دانستن مطالب جلسات قبل نیست. ظاهرا از چیزهای خیلی ساده و بدیهی شروع می‌کنیم. همه چیز منطقی پیش می‌رود و جبر مربوط به کوانتوم را می‌سازیم.

۱. جبر عملگرها

یک کمیت مثل A را می‌خواهیم اندازه‌گیری کنیم. فرض کنید که این کمیت n حالت مختلف a_1 و a_2 و ... و a_n را بتواند اختیار کند. بعد از اندازه‌گیری، یکی از این مقادیر به دست می‌آید. مثلا در آزمایش اشترن-گرلاخ کمیت اسپین الکترون را اندازه‌گیری میکردیم که دو حالت مختلف داشت. بعد از اندازه‌گیری، سیستم مثلا در حالت $\langle\uparrow|$ قرار می‌گیرد. در آزمایش اشترن گرلاخ دو نوع انتخابگر میتوانیم قرار دهیم. با قرار دادن یک مانع جلوی بخش پایینی، یک انتخابگر از ذرات $\langle\uparrow|$ به دست می‌آوریم. و همچنین در صورت قرار دادن مانعی در بخش بالا، یک انتخابگر از ذرات $\langle\downarrow|$ به دست می‌آوریم. پس می‌توانیم یک سیستم خالص به دست بیاوریم. اگر یک سیستم خالص $\langle\uparrow|$ داشته باشیم، و دوباره یک انتخابگر $\langle\uparrow|$ قرار دهیم، تمام ذرات از دستگاه خارج می‌شوند. ولی اگر یک سیستم خالص $\langle\uparrow|$ داشته باشیم و در جلوی آن یک انتخابگر $\langle\downarrow|$ قرار دهیم، در خروجی هیچ چیز خارج نخواهد شد (به شکل ۱ نگاه کنید)



شکل ۱ وضعیت قرار دادن دو انتخابگر در آزمایش اشترن گرلاخ

در حالت کلی که متغیر n حالته را اندازه می‌گرفتیم را در نظر بگیرید. حال n نوع جداکننده خواهیم داشت. این جداکننده ها را با یک نماد نشان میدهیم:

$$\boxed{\begin{array}{r}\text{Measure } A\\ \text{Select } a'\end{array}}$$

ما این انتخابگر را با یک نماد ساده‌تر نمایش می‌دهیم:

$$\boxed{\begin{array}{r}\text{Measure } A\\ \text{Select } a'\end{array}} \longrightarrow \big|a'a'\big|$$

ممکن است بپرسید که چرا دو بار a' را نوشته‌اید؟ جواب را بعدا متوجه خواهید شد. ما همچنین دو نماد برای دو عملگر بدیهی معرفی میکنیم. یک عملگری که همه حالتها را اجازه خروج میدهد که با 1 نمایش میدهیم و عملگری که به هیچ چیز اجازه خروج ندهد که با 0 نمایش میدهیم:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Accept}\\ \text{Everything}\end{array}} \longrightarrow 1$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Accept}\\ \text{Nothing}\end{array}} \longrightarrow 0$$

حالا می‌خواهیم جبر را برای این نمادها درست کنیم. باید + و . را تعریف کنیم. برای تعریف ضرب، از تاثیر متوالی زمانی دو عملگر استفاده می‌کنیم. برای مثال با تاثیر متوالی یک عملگر تکراری، هیچ تغییری حاصل نمی‌شود. به این معنی که با توجه به شکل ۱:

$$\big|a'a'\big|\big|a'a'\big| = \big|a'a'\big|$$

همچنین با توجه به شکل ۱ اگر یک انتخابگر از یک نوع دیگر را قرار دهیم، نتیجه صفر است:

$$a' \neq a'' : \qquad \big|a'a'\big|\big|a''a''\big| = 0$$

به همین ترتیب خواص واضح حاصل ضرب، برای عملگرهای 0 و 1 به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\big|a'a'\big|1 = 1\big|a'a'\big| &= \big|a'a'\big|\\ 11 &= 1\ ,\\ 10 = 01 &= 0\ ,\end{aligned}$$

$$\left|a'a'\right|0 = 0\left|a'a'\right| = 0$$
$$00 = 0\ .$$

حال می‌خواهیم عمل + را تعریف کنیم. جمع را به این صورت تعریف می‌کنیم که مثلا اگر یک عملگر حالت a' را اجازه خروج بدهد و یک عملگر حالت a'' را اجازه خروج بدهد، در این صورت حاصل جمع این دو عملگر یعنی هر دو حالت a' و a'' را اجازه خروج بدهد. پس به سادگی عمل جابجایی در جمع را داریم:

$$\left|a'a'\right| + \left|a''a''\right| = \left|a''a''\right| + \left|a'a'\right|$$

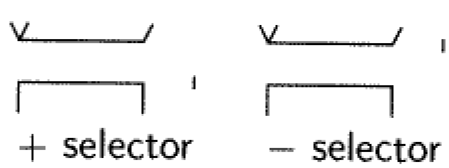
حال این قضیه را با این تعریف بیان می‌کنیم که اگر به تمام حالات مختلف اجازه خروج دهیم، مثل عملگر 1 خواهد بود. یعنی داریم:

$$\sum_{a'}\left|a'a'\right| = 1$$

که بیانگر کامل بودن نمادهای $\left|a'a'\right|$ است. بدیهی است که با این تعاریف، خاصیت شرکت پذیری وجود دارد. آیا این تعاریف، خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع را دارد؟ جواب این است که بله، دارد. برای تقریب به ذهن، حالت تاثیر عملگر 1 را در نظر بگیرید که با همین ایده و روش می‌توانید توزیع پذیری را اثبات کنید:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{a'}\left|a'a'\right|\right)\left|a''a''\right| &= \sum_{a'}\left|a'a'\right|\left|a''a''\right| \\ &= \left|a''a''\right|\left|a''a''\right| + \sum_{a'(\neq a'')}\left|a'a'\right|\left|a''a''\right| \\ &= \left|a''a''\right| + 0 + \cdots + 0 = \left|a''a''\right|\ .\end{aligned}$$

حالا می‌خواهیم نماد دیگری را معرفی کنیم. نماد $\left|a'a''\right|$ را در نظر بگیرید که می‌خواهیم معنای آن را روشن کنیم. برای مثال به سیستم دو حالته اسپین آزمایش اشترن گرلاخ برمی‌گردیم.



در خروجی متوالی دو انتخابگر فوق، قاعدتا هیچ چیزی خارج نخواهد شد. اما فرض کنید، که در ناحیه بین این دو انتخابگر، یک میدان مغناطیسی اعمال کنیم که جهت اسپین را معکوس کند. با این فرض ابتدا فقط + ها را

انتخاب می‌کنیم و سپس همه اینها را تبدیل به $-$ می‌کنیم. پس نماد $|a'a''|$ به این معنا خواهد بود که ابتدا حالت a'' را انتخاب کرده و سپس آن را به a' خالص تبدیل کنیم. حال با این تعمیم از اعضای مجموعه‌مان، دوباره به عملگر ضرب نگاهی می‌اندازیم. در تعریف، تغییری ایجاد نمی‌کنیم. پس به سادگی داریم:

$$\left|a'a''\right|\left|a''a'''\right| = \left|a'a'''\right|$$

توجه کنید که در این تعریف ترتیب ضرب را در نظر بگیرید. به این معنا که با نماد بالا ابتدا اتم a''' انتخاب شده و سپس تبدیل به اتم a'' می‌شود. سپس در انتها این اتم تبدیل به اتم a' به عنوان خروجی نهایی می‌شود. و همچنین داریم:

$$\left|a'a''\right|\left|a'''a^{\prime v}\right| = 0 \qquad \text{if} \quad a'' \neq a'''$$

دوباره خواص توزیع‌پذیری را با توجه به ایده زیر برای 1 پیگری می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{a'}\left|a'a'\right|\right)\left|a''a'''\right| &= \sum_{a'}\left|a'a'\right|\left|a''a'''\right| \\ &= \left|a''a''\right|\left|a''a'''\right| + 0 + \cdots \qquad = \left|a''a'''\right|\end{aligned}$$

اینجا باید یک مفهوم را بهتر بررسی کنیم. میخواهیم تعریف دقیقی از منفی ارائه کنیم که در واقع باعث فهم بهتر + خواهد شد. ابتدا حاصل ضرب یک عدد در یک عملگر را تعریف می‌کنیم. ابتدا با اعداد 1 و 0 شروع می‌کنیم:

$$\underbrace{1}_{\text{number}}\left|a'a''\right| = \left|a'a''\right|, \qquad \underbrace{0}_{\text{number}}\left|a'a''\right| = \underbrace{0}_{\text{symbol}}.$$

توجه کنید که با تعریف این حاصل ضرب، برای مثال داریم:

$$\left|a'a''\right|\left|a'''a^{\prime v}\right| = \left\{\begin{array}{r}\left|a'a^{\prime v}\right| = 1\left|a'a^{\prime v}\right| \text{ if } a'' = a''' \\ 0 = 0\left|a'a^{\prime v}\right| \text{ if } a'' \neq a'''\end{array}\right\}$$

$$= \delta(a'', a''')\left|a'a^{\prime v}\right|,$$

به طوریکه نماد دلتای کرونکیر به صورت زیر است:

$$\delta(a'', a''') = \begin{cases} 1 \text{ if } a'' = a''' \\ 0 \text{ if } a'' \neq a''' \end{cases}$$

حال برای مثال تعریف میکنیم:

$$1\big|a'a''\big| + 1\big|a'a''\big| = (1+1)\big|a'a''\big|$$

حالا با این مطالب گفته شده، منفی یک عملگر را می‌فهمیم. توجه کنید که یک عملگر لزوما وارون ضربی ندارد. قبل از ادامه می‌خواهیم خواص 0 را نسبت به جمع بررسی کنیم:

$$\begin{aligned} &\big|a'a'\big| + 0 = 0 + \big|a'a'\big| = \big|a'a'\big| \\ &1 + 0 = 0 + 1 = 1\ , \\ &0 + 0 = 0\ . \end{aligned}$$

خوب است در اینجا دو حاصل ضرب زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} &\big|a'a''\big|\big|a''a'\big| = \big|a'a'\big|\ , \\ &\big|a''a'\big|\big|a'a''\big| = \big|a''a''\big| \end{aligned}$$

اگر خوب به دو نتیجه بالا نگاه کنید، نکته جالبی را متوجه خواهید شد که حاصل ضرب، خاصیت جابجایی را ندارد. ترتیب حاصل ضرب مهم است و لذا تقسیم را اینجا تعریف نخواهیم کرد. همچنین توجه کنید که اگر حاصل ضرب صفر باشد، بر این دلالت ندارد که لزوما یکی از عملگرها صفر باشد(برای مثال دو حاصل ضرب زیر را در نظر بگیرید):

$$a' \neq a'' : \qquad \big|a'a'\big|\big|a''a''\big| = 0$$

$$a' \neq a'' : \qquad \big|a'a''\big|\big|a'a''\big| = 0$$

جابجاگر دو عملگر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[X, Y] \equiv XY - YX$$

می‌خواهیم روی معنای $|a''a'|$ بیشتر فکر کنیم. قرار است که ابتدا a' انتخاب شود، در واقع تنها اتمی که دارای خاصیت a' است وارد می‌شود، و در نهایت اتم a'' خارج می‌شود. می‌توان اینگونه فکر کرد که اتم a' از بین می‌رود و در جای او، اتم a'' به وجود می‌آید. این یک فرآیند تصوری است که دو مرحله ذهنی دارد. ما این مراحل را با نماد جدیدی معرفی می‌کنیم:

$$\left|a''a'\right| = \underset{\substack{a'' \\ \text{created}}}{\left|a''\right\rangle} \quad \underset{a'\text{destroyed}}{\left\langle a'\right|}$$

خب این بی‌ضرر است. اما ما یک قدم بسیار بزرگ برمی‌داریم. ما می‌خواهیم به این وضعیت به صورت حاصل ضرب دو نماد جدید نگاه کنیم. حاصل ضرب $\left|a^{\prime v}a'''\right|\left|a''a'\right|$ به این معنا بود که ابتدا $\left|a''a'\right|$ عمل کرده و سپس $\left|a^{\prime v}a'''\right|$ عمل می‌کند، و لذا اگر بخواهیم تحلیلی از آن ارائه دهیم ابتدا اتمهای a' از بین رفته و تبدیل به اتمهای a'' می‌شوند و سپس اتمهای a''' انتخاب شده و به اتمهای $a^{\prime v}$ تبدیل می‌شوند و لذا در صورتیکه a'' با a''' برابر نباشد، حاصل صفر و در غیر این صورت برابر با $\left|a^{\prime v}a'\right|$ خواهد شد. حال با نماد بالا ادامه می‌دهیم.

$$\left|a''a'\right| = \left|a''\right\rangle\left\langle a'\right|$$

$$\left|a^{\prime v}a'''\right| = \left|a^{\prime v}\right\rangle\left\langle a'''\right|$$

و لذا ترتیب نوشتن حاصل ضرب در این نماد جدید به صورت زیر خواهد بود. به این معنا که داریم:

$$\left|a^{\prime v}a'''\right|\left|a''a'\right| = \left(\left|a^{\prime v}\right\rangle\left\langle a'''\right|\right)\left(\left|a''\right\rangle\left\langle a'\right|\right)$$

توجه کنید که این نکته چپ یا راست نویسی صرفا یک نماد است. حالا این قدمی که گفتیم را بر میداریم که واقعا به صورت حاصل ضرب به این موجود دو قسمتی نگاه می‌کنیم. لذا برای مثال با توجه به تعریف دو عمل که اولی انتخاب و از بین رفتن اتم و دومی ایجاد اتم دوم است خاصیت شرکت پذیری وجود دارد. به این معنا که داریم:

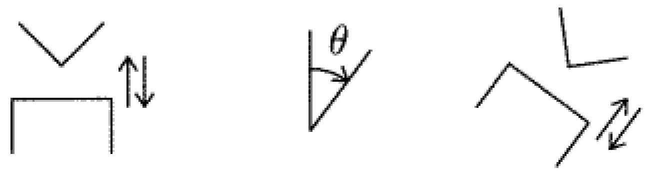
$$\left|a^{\prime v}a'''\right|\left|a''a'\right| = \left(\left|a^{\prime v}\right\rangle\left\langle a'''\right|\right)\left(\left|a''\right\rangle\left\langle a'\right|\right) = \left|a^{\prime v}\right\rangle\left(\left\langle a'''\right|\left|a''\right\rangle\right)\left\langle a'\right|$$

و لذا با توجه به نکاتی که از قبل گفتیم که جواب این حاصل ضرب برابر با $\delta(a''',a'')\left|a^{\prime v}a'\right|$ است که با نماد جدیدمان می‌توانیم به صورت $\delta(a''',a'')\left|a^{\prime v}\right\rangle\left\langle a'\right|$ بنویسیم. لذا اگر داشته باشیم که حاصل ضرب $\left\langle a'''\right|\left|a''\right\rangle$ که از این به بعد برای سادگی با $\left\langle a'''\middle|a''\right\rangle$ نشان می‌دهیم، با $\delta(a''',a'')$ برابر باشد، آنگاه این برابری برقرار است. اما معنای این جمله $\left\langle a'''\middle|a''\right\rangle$ چیست؟ ابتدا اتم a'' ایجاد شده و سپس اتم a''' از بین برود. قاعدتا در صورت برابری a'' و a''' حاصل یک و در صورت نابرابری حاصل ۰ خواهد بود و توجه کنید که حاصل عدد است نه سمبل.

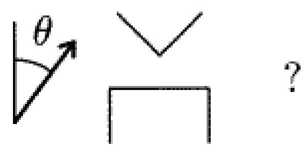
لذا اکنون در سیستم n حالته ما n نماد $\left\langle a\right|$ و n نماد $\left|a\right\rangle$ را داریم. به طوریکه حاصل ضرب $\left\langle\ \middle|\ \right\rangle$ بین دو موجود با اندیس برابر ، یک و در صورت نابرابری اندیس برابر صفر خواهد بود. نماد $\left\langle a\right|$ نشانگر ایجاد یک اتم و نماد $\left|a\right\rangle$ به معنای از بین رفتن است. لذا دو نماد معنای متفاوتی دارند.

۲. مثالهایی جهت تقریب به ذهن

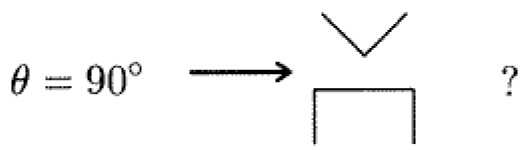
اندازه‌گیری اسپین در راستای محور z فقط یک مثال از اندازه‌گیری است. ما می‌توانیم برای مثال اسپین را در جهت‌های دیگری نیز اندازه‌گیری کنیم:



می‌دانیم که در هر یک از این اندازه‌گیری‌ها دو حالت برای بیم خروجی امکان‌پذیر است. حال اسپین را در جهت θ اندازه گرفته و فقط اسپین‌های در این راستا را اجازه عبور می‌دهیم (یعنی از عبور اسپین‌های در خلاف جهت جلوگیری می‌کنیم) حال اگر این مجموعه اسپین را به سمت دستگاه در راستای z بفرستیم، چند درصد بالا و چند درصد پایین می‌آیند؟

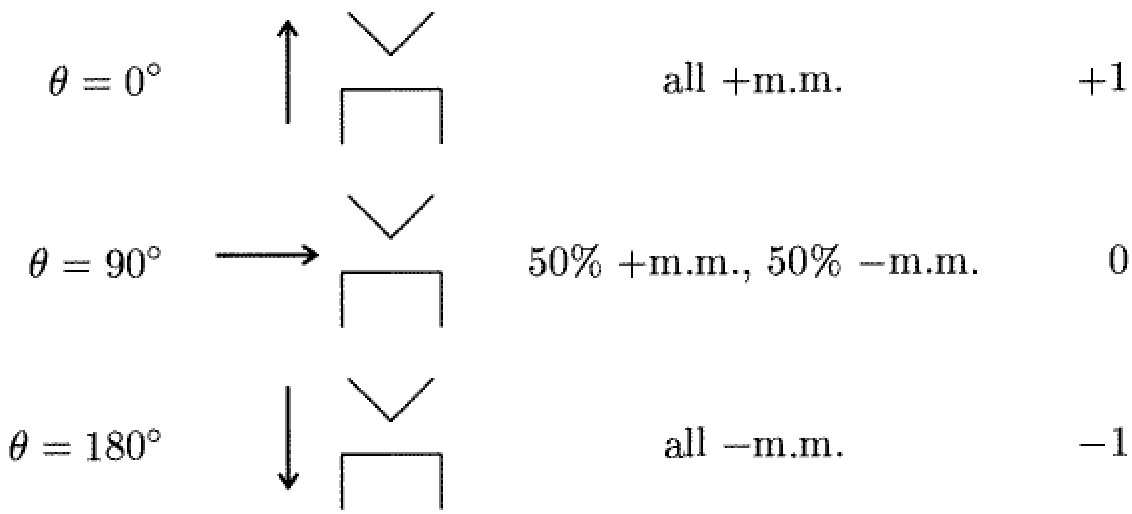


دو وضعیت است که ما دقیقا جواب آنها را می‌دانیم. به ازای زاویه صفر درجه تمام اسپینها بالا هستند و به ازای زاویه ۱۸۰ درجه تمام اسپینها پایین هستند. حال راجع به زاویه ۹۰ درجه چه اتفاقی می‌افتد؟

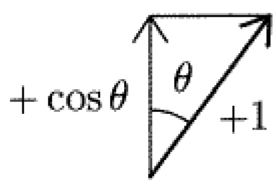


روشن است که در این حالت نیمی از الکترونها بالا و نیمی پایین خواهند بود. یک تک اتم را نمی‌توانیم پیش‌بینی کنیم. فقط می‌توانیم بگوییم که در تعداد زیادی آزمایش نیمی از نتایج بالا و نیمی از نتایج پایین خواهند بود. لذا میانگین در سه حالتی که فعلا میدانیم به این صورت است:

Average



آیا ما می‌توانیم یک نتیجه منطقی از زاویه دلخواه θ بگیریم؟ با توجه به اینکه حرف ما راجع به میانگین است، انتظار معقول این است که میانگین اسپین برابر با تصویر اسپین در راستای z شود:



پس میانگین برابر با $\cos\theta$ خواهد شد. چون ابتدا فقط اتمهای + در راستای θ را انتخاب کرده بودیم، احتمال اینکه یک اتم در راستای z بالا برود را با $P(\overset{z}{+},\overset{\theta}{+})$ نشان می‌دهیم و اتمهایی که به سمت پایین می‌روند را با $P(\overset{z}{-},\overset{\theta}{+})$ نشان می‌دهیم. پس میانگین وزن دار به صورت زیر خواهد بود:

$$\cos\theta = (+1)P(+,+) + (-1)P(-,+)$$

از طرفی حاصل جمع احتمالها باید برابر با یک باشد:

$$1 = P(+,+) + P(-,+)$$

پس با حل دو معادله بالا خواهیم داشت:

$$p(+,+) = \frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2(\tfrac{1}{2}\theta)$$
$$p(-,+) = \frac{1-\cos\theta}{2} = \sin^2(\tfrac{1}{2}\theta)$$

با توجه به اینکه اگر ابتدا اسپینهای در راستای منفی را انتخاب کرده بودیم، انگار با اسپین مثبت در راستای زاویه $\pi-\theta$ کار کنیم، لذا احتمالهای زیر را فورا خواهیم داشت:

$$p(+,-) = \cos^2\left(\tfrac{1}{2}(\pi-\theta)\right) = \sin^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)$$

$$p(-,-) = \sin^2\left(\tfrac{1}{2}(\pi-\theta)\right) = \cos^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)$$

۳.احتمال

مشابه قسمت قبل، ابتدا با اندازه‌گیری کمیت A یک حالت a' را انتخاب می‌کنیم. این عمل را با ایجاد یک اتم a' یعنی با $|a'\rangle$ نشان می‌دهیم. حال اندازه‌گیری خاص B که با $M(B)$ نمایش می‌دهیم، انجام می‌دهیم. پس تا الآن حاصل $M(B)|a'\rangle$ خواهد بود. در نهایت با از بین بردن اتم a' یک عدد به دست می‌آوریم:

$$P(M(B),a') = \langle a'|M(B)|a'\rangle$$

می‌خواهیم راجع به مفهوم این عدد بیشتر فکر کنیم. چند نوع حالت برای $M(B)$ در نظر می‌گیریم.

الف) ابتدا حالتی که فقط یک انتخاب خاص b' داشته باشد به این معنا که داریم:

$$M(B) = |b'\rangle\langle b'|$$

$$\left[P(|b'b'|,a') =\right] \quad P(b',a') = \langle a'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle$$

ب) حالتی را در نظر بگیرید که دو انتخاب b' یا b'' را داشته باشد:

$$M(B) = |b'\rangle\langle b'| + |b''\rangle\langle b''|$$

$$\begin{aligned} P(b' \text{ or } b'',a') &= \langle a'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle + \langle a'|b''\rangle\langle b''|a'\rangle \\ &= P(b',a') + P(b'',a') \end{aligned}$$

ج) حالتی را در نظر بگیرید که تمام انتخابهای b' را داشته باشد:

$$M(B) = \sum_{b'} |b'\rangle\langle b'| = 1$$

$$P(1,a') = \sum_{b'} \langle a'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle = \langle a'|1|a'\rangle = 1$$

$$\sum_{b'} P(b',a') = 1$$

این رابطه آخر است که نشان دهنده این خاصیت مهم $p(b',a')$ است. در واقع $p(b',a')$ نشان دهنده احتمال این است که پس از اندازه‌گیری B که بر روی اتم a' انجام می‌شود، دارای خروجی خاص b' باشد. یعنی با چه احتمالی اندازه‌گیری B روی اتم a' نتیجه b' دارد.

بگذارید در سیستم دو حالته با یک مثال وضعیت را روشن کنیم. فرض کنید که B همان A باشد. لذا داریم:

$$p(a',a'') = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{if } a' = a'' \\ 0 & \text{if } a' \neq a'' \end{matrix} \right\} = \delta(a',a'')$$

در واقع با فرمولهای بالا داریم:

$$\langle a' | a'' \rangle \langle a'' | a' \rangle = [\delta(a',a'')]^2 = \delta(a',a'')$$

توجه کنید که چون احتمال باید عددی حقیقی بین صفر و یک باشد، لذا اینجا این فرض را می‌کنیم که

$$\langle b' | a' \rangle = \langle a' | b' \rangle^*$$

و لذا داریم:

$$p(a',b') = \left| \langle a' | b' \rangle \right|^2 \geq 0 \ .$$

به $\langle b' | a' \rangle$ دامنه احتمال می‌گویند. دامنه احتمال اینکه اتم a' در اندازه‌گیری B در حالت b' یافت شود.

حال کار دیگری می‌خواهیم انجام دهیم. فرض کنید که با اندازه‌گیری A یک اتم خاص a' را جدا کنیم که یعنی تا اینجا با $|a'\rangle$ مواجهیم. حال یک اندازه گیری خاص B که با $M(B)$ آن را نشان می‌دهیم روی این اتم انجام می‌دهیم. در نهایت ما حالت خاص c' از اندازه‌گیری C را انتخاب می‌کنیم که نتیجه $\langle c' | M(B) | a' \rangle$ خواهد بود.

حال نماد زیر را تعریف می‌کنیم و می‌خواهیم معنای آن را بهتر متوجه بشویم:

$$P(c', M(B), a') = \left| \langle c' | M(B) | a' \rangle \right|^2$$

دوباره مشابه قبل چند حالت را در نظر می‌گیریم:

الف) یک انتخابگر که به معنای $M(B) = |b'\rangle\langle b'|$ است:

$$\left[P(c', |b'b'|, a') = \right] \quad P(c', b', a') = \left| \langle c' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle \right|^2 = P(c', b') P(b', a')$$

توضیح این است که ابتدا اتم a' تحت اندازه‌گیری B قرار گرفته که اتمها با نسبت $P(b',a')$ نتیجه b' خواهند داشت و سپس تحت یک اندازه گیری دیگر C قرار می‌گیرند که با احتمال $P(c',b')$ (یعنی این نسبت از این اتمها) نتیجه c' خواهند داشت و در نهایت نسبتی از اتمها که از کل فرآیند خارج میشوند حاصل ضرب این دو احتمال خواهد بود.

ب) تمام حالات را با M(B) انتخاب کنیم. به این معنا که $M(B)=\sum_{b'}|b'\rangle\langle b'|=1$ باشد. در این حالت نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$P(c',1,a')=P(c',a')$$

ج) حالت غیرانتخابی که تفاوتش با حالت قبل این است که در اینجا جداسازی را در B انجام می‌دهیم و هریک را جداگانه تحت اندازه‌گیری C قرار می‌دهیم. در این حالت داریم:

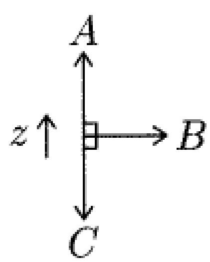
$$P(c',b,a')=\sum_{b'}P(c',b')P(b',a')$$

توجه کنید که در دو حالت آخر هیچ اتمی را از بین نبردیم، لذا جمع کل احتمالها باید برابر یک شود:

$$\sum_{c'}P(c',1,a')=\sum_{c'}P(c',a')=1$$

$$\sum_{c'}P(c',b,a')=\sum_{b'}P(b',a')\sum_{c'}P(c',b')=1$$

برای مثال فرض کنید که A و B و C اندازه‌گیری اسپین در سه جهت مختلف مشابه شکل زیر باشند:



$$P(\overset{c}{+},b,\overset{a}{+})=P(\overset{c}{+},\overset{b}{+})P(\overset{b}{+},\overset{a}{+})+P(\overset{c}{+},\overset{b}{-})P(\overset{b}{-},\overset{a}{+})=\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(\overset{c}{-},b,\overset{a}{+})=P(\overset{c}{-},\overset{b}{+})P(\overset{b}{+},\overset{a}{+})+P(\overset{c}{-},\overset{b}{-})P(\overset{b}{-},\overset{a}{+})=\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

توجه کنید که داریم:

$$P(\overset{c}{+},1,\overset{a}{+})=P(\overset{c}{+},\overset{a}{+})=0$$

(چونکه اسپین بالا در راستای z قطعا پایین نیست!) و همچنین داریم:

$$P(\overset{c}{-},1,\overset{a}{+})=P(\overset{c}{-},\overset{a}{+})=1$$

توجه کنید که:

$$P(\overset{c}{+},1,\overset{a}{+})=\left|\left\langle\overset{c}{+}\middle|\overset{b}{+}\right\rangle\left\langle\overset{b}{+}\middle|\overset{a}{+}\right\rangle+\left\langle\overset{c}{+}\middle|\overset{b}{-}\right\rangle\left\langle\overset{b}{-}\middle|\overset{a}{+}\right\rangle\right|^2$$

$$P(\overset{c}{-},1,\overset{a}{+})=\left|\left\langle\overset{c}{-}\middle|\overset{b}{+}\right\rangle\left\langle\overset{b}{+}\middle|\overset{a}{+}\right\rangle+\left\langle\overset{c}{-}\middle|\overset{b}{-}\right\rangle\left\langle\overset{b}{-}\middle|\overset{a}{+}\right\rangle\right|^2$$

پس توجه کنید که قدرمطلق هریک از حاصل ضربها باید نیم باشد و لذا در مورد بالایی باید منها باشد و در پایینی جمع(که بعدا دقیقتر این موضوع را نشان میدهیم که چرا با علامت منها ظاهر میشود):

$$p(+,1,+) = \left|\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right|^2 = 0\ .$$

توجه کنید که نکته مهمی را می‌خواهیم اینجا ذکر کنیم و آن این نکته است که اندازه‌گیری سیستم را مختل می‌کند. به این معنا که در جایی که اندازه‌گیری B صورت نگرفت عملا با $P(c',1,a')$ مواجه شدیم که به صورت زیر بود:

$$P(c',1,a') = \left|\sum_{b'} \langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\right|^2$$

اما اگر اندازه‌گیری صورت گرفت ولی تمام اتمها باقی ماندند نتیجه زیر را گرفتیم:

$$P(c',b,a') = \sum_{b'} \left|\langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\right|^2$$

که به وضوح متفاوت با حالت قبلی است.

۴. کمیت مشاهده‌پذیر

آیا می‌توانیم نمادی پیدا کنیم که نشانگر یک خاصیت فیزیکی باشد؟ نقطه طبیعی که می‌توانیم شروع کنیم مقدار میانگین یک کمیت است. فرض کنید که یک خاصیت به نام B (مثلا اسپین در جهت z) را داریم. می‌خواهیم روی اتمهای a' آن را اندازه گرفته و مقدار میانگین آن را محاسبه کنیم. داریم:

$$\langle B\rangle_{a'} = \sum_{b'} b' P(b',a') = \sum_{b'} b'\langle a'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle = \langle a'|\left(\sum_{b'} |b'\rangle b'\langle b'|\right)|a'\rangle$$

که نشان دهنده جداشدن بخش B و A است و لذا داریم:

$$B = \sum_{b'} |b'\rangle b'\langle b'|,$$

و داریم:

$$\langle B\rangle_{a'} = \langle a'|B|a'\rangle\ .$$

توجه کنید که داریم:

$$\langle b'|B = \sum_{b''} \underbrace{\langle b'|b''\rangle}_{=\delta(b',b'')} b''\langle b''| = b'\langle b'|$$

و همچنین داریم:

$$B|b''\rangle = \sum_{b'} |b'\rangle b' \underbrace{\langle b'|b''\rangle}_{=\delta(b',b'')} = |b''\rangle b'' \ .$$

می‌خواهیم توجه شما را به یک نکته جلب کنیم. اگر نتیجه آزمایش برای اندازه‌گیری B یکی از حالات b_1 یا b_2 یا ... یا b_n باشد، آنگاه نتیجه اندازه‌گیری B^2 یکی از حالات b_1^2 یا b_2^2 یا ... یا b_n^2 خواهد بود. حال با محاسبات بالا ماتریس B^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$B^2 = B\sum_{b'} |b'\rangle b'\langle b'| = \sum_{b'} |b'\rangle (b')^2 \langle b'|$$

توجه شما را به یک نکته دیگر جلب میکنیم. داریم:

$$B - b_1 = \sum_{b'} |b'\rangle (b' - b_1)\langle b'|$$

$$(B - b_1)(B - b_2) = \sum_{b'} |b'\rangle (b' - b_1)(b' - b_2)\langle b'|$$

و در نهایت

$$\begin{aligned}(B - b_1)\cdots(B - b_n) &= \prod_{k=1}^{n} (B - b_k) \\ &= \sum_{b'} |b'\rangle \left[\prod_{k=1}^{n} (b' - b_k)\right] \langle b'| = 0\end{aligned}$$

چرا برابر با صفر میشود؟ (سعی کنید خودتان را توجیه کنید) این نشان میدهد که ماتریس B در یک معادله درجه n صدق میکند. و لذا هر تابع از B را می‌توان به صورت حاصل جمع ضرایبی از 1 و B و B^2 و ... و B^{n-1} نوشت.

$$f(B) = \sum_{b'} f(b')|b'b'| = \sum_{b'} |b'\rangle f(b')\langle b'| \ .$$

تمرین. ماتریس انتخاب $|b'\rangle\langle b'|$ را به صورت جمع ضرایبی از 1 و B و B^2 و ... و B^{n-1} بنویسید. در واقع نشان دهید با عبارت زیر برابر است:

$$\prod_{b''(\neq b')}\left(\frac{B-b''}{b'-b''}\right)$$

تمرین. ثابت کنید:

$$1=\sum_{b'}\prod_{b''(\neq b')}\left(\frac{B-b''}{b'-b''}\right)$$

خوب است اینجا عملگرهای پاولی را معرفی کنیم. ابتدا اندازه‌گیری اسپین در راستای z (که با عملگر σ_z نشان میدهیم) را در نظر بگیرید که دو مقدار ۱+ و ۱- را دارد. با توجه به معادله درجه n که بالا به دست آوردیم داریم:

$$(\sigma_z-1)(\sigma_z+1)=\sigma_z^2-1=0$$

همچنین با توجه به تمرین بالا داریم:

$$\begin{aligned}|++|&=\frac{\sigma_z-(-1)}{1-(-1)}=\frac{1+\sigma_z}{2}\ ,\\ |--|&=\frac{\sigma_z-1}{-1-1}\quad=\frac{1-\sigma_z}{2}\ .\end{aligned}$$

لذا با توجه به این دو رابطه اخیر داریم:

$$|++|+|--|=1,\qquad |++|-|--|=\sigma_z\ .$$

توجه کنید که دو رابطه‌ای که در ابتدا معرفی کردیم به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}|++||++|&=\left(\frac{1+\sigma_z}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+1+2\sigma_z)=\frac{1+\sigma_z}{2}=|++|\ ,\\ |--||--|&=\left(\frac{1-\sigma_z}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+1-2\sigma_z)=\frac{1-\sigma_z}{2}=|--|\ ,\\ |++||--|&=\frac{1+\sigma_z}{2}\frac{1-\sigma_z}{2}=\frac{1-\sigma_z^2}{4}=0\end{aligned}$$

توجه کنید که دو جهت x و y نیز برای اندازه‌گیری داریم، و مشابه حالت قبلی دو حالت ۱+ و ۱- را داریم. لذا مشابه حالت قبل داریم:

$$\sigma_x^2 = 1, \qquad \sigma_y^2 = 1$$

حال روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\big|{+-}\big|\big|{+-}\big| = 0\,, && \big|{-+}\big|\big|{-+}\big| = 0\,, \\ &\big|{+-}\big|\big|{-+}\big| = \big|{++}\big|\,, && \big|{-+}\big|\big|{+-}\big| = \big|{--}\big| \end{aligned}$$

لذا توجه کنید که:

$$\Big[\big|{-+}\big| + \big|{+-}\big|\Big]^2 = \\ \underbrace{\big|{-+}\big|\big|{-+}\big|}_{=0} + \underbrace{\big|{+-}\big|\big|{-+}\big|}_{=|++|} + \underbrace{\big|{-+}\big|\big|{+-}\big|}_{=|--|} + \underbrace{\big|{+-}\big|\big|{+-}\big|}_{=0} = 1\,,$$

همچنین

$$\Big[\big|{-+}\big| - \big|{+-}\big|\Big]^2 = 0 - \big|{++}\big| - \big|{--}\big| + 0 = -1$$

لذا مربع دو عملگر $|{-+}|+|{+-}|$ و $\mathrm{i}(|{-+}|-|{+-}|)$ برابر واحد است. لذا با توجه به انتخاب محور x و y که دلخواه است داریم:

$$\sigma_x = \big|{-+}\big| + \big|{+-}\big|$$

$$\sigma_y = \mathrm{i}\big|{-+}\big| - \mathrm{i}\big|{+-}\big|\,.$$

توجه کنید که داریم:

$$\big|{+-}\big| = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x + i\sigma_y\right), \quad \big|{-+}\big| = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - i\sigma_y\right)$$

و لذا داریم:

$$0 = \Big[\big|{+-}\big|\Big]^2 = \tfrac{1}{4}\left(\sigma_x + i\sigma_y\right)^2 = \tfrac{1}{4}\big[1 - 1 + \mathrm{i}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x)\big]$$

پس خواهیم داشت:

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0; \quad \sigma_y\sigma_x = -\sigma_x\sigma_y$$

همچنین با توجه به

$$\frac{1}{4}\underbrace{(\sigma_x + \mathrm{i}\sigma_y)(\sigma_x - \mathrm{i}\sigma_y)}_{=1+1-2\mathrm{i}\sigma_x\sigma_y} = \frac{1}{2}(1+\sigma_z)$$

داریم:

$$\sigma_x\sigma_y = \mathrm{i}\sigma_z$$

همچنین داریم:

$$\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x = 0, \quad \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y = 0$$

همچنین :

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z = \mathrm{i} = \sigma_y\sigma_z\sigma_x = \sigma_z\sigma_x\sigma_y$$

همچنین

$$\sigma_y\sigma_z = \mathrm{i}\sigma_x, \quad \sigma_z\sigma_x = \mathrm{i}\sigma_y$$

در واقع چهار عملگر $|\pm\pm|$ را در نظر بگیرید. در بالا رابطه این چهار عملگر را با چهار عملگر σ_x و σ_y و σ_z و 1 را بررسی کردیم. سه ماتریس σ را با بردار $\vec{\sigma}$ نشان میدهیم. دو بردار که مولفه های آنها عدد هستند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را در نظر بگیرید. عملگر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b} &= (\sigma_x a_x + \sigma_y a_y + \sigma_z a_z)(\sigma_x b_x + \sigma_y b_y + \sigma_z b_z)\\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z + \mathrm{i}\sigma_x(a_y b_z - a_z b_y) + \cdots\end{aligned}$$

و لذا داریم:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

قرار دهید a و b دو بردار یکه برابر با هم و برابر با n باشند، لذا داریم:

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2 = 1$$

که نشان دهنده این است که اندازه‌گیری $\vec{\sigma}$ در هر راستایی دو حالت ۱+ و ۱- را دارد.

۵.صلیب

صلیب یک عملگر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\left|a'a''\right|^{\dagger}=\left|a''a'\right|$$

و لذا داریم:

$$\left|a'a'\right|^{\dagger}=\left|a'a'\right|$$

به عملگری که صلیبش با خودش برابر باشد، عملگر هرمیتی می‌گوییم. در مورد عملگرهای ایجاد یک حالت و از بین رفتن یک حالت، نیز داریم:

$$\langle a'|^{\dagger}=|a'\rangle\ ,\quad |a'\rangle^{\dagger}=\langle a'|$$

به صورت کلی تکرار عمل صلیب، دوباره خود عملگر به دست می‌آید:

$$\left(X^{\dagger}\right)^{\dagger}=X$$

توجه کنید که داریم:

$$\left(|a'\rangle\langle a''|\right)^{\dagger}=|a''\rangle\langle a'|=\left(\langle a''|\right)^{\dagger}\left(|a'\rangle\right)^{\dagger}$$

یعنی در واقع:

$$(XY)^{\dagger}=Y^{\dagger}X^{\dagger}$$

مثال دیگر

$$\left(\left|a'b'\right|\left|c'd'\right|\right)^{\dagger}=\left|d'c'\right|\left|b'a'\right|=\left|c'd'\right|^{\dagger}\left|a'b'\right|^{\dagger}$$

با نماد دیگر:

$$\left|a'b'\right|\left|c'd'\right|=|a'\rangle\langle b'|c'\rangle\langle d'|=\langle b'|c'\rangle\left|a'd'\right|$$

$$\left|d'c'\right|\left|b'a'\right|=|d'\rangle\langle c'|b'\rangle\langle a'|=\langle b'|c'\rangle^{*}\left|d'a'\right|$$

در واقع صلیب حاصل ضرب یک عدد در یک عملگر به صورت زیر است:

$$(\lambda X)^\dagger = \lambda^* X^\dagger$$

همچنین راجع به جمع داریم:

$$(X+Y)^\dagger = X^\dagger + Y^\dagger$$

برای عملگر واحد داریم:

$$1^\dagger = \left(\sum_{a'} \left|a'a'\right|\right)^\dagger = \sum_{a'} \left|a'a'\right|^\dagger = \sum_{a'} \left|a'a'\right| = 1$$

برای یک کمیت مشاهده پذیر داریم:

$$B = \sum_{b'} \left|b'\right\rangle b' \left\langle b'\right| \qquad \text{with} \quad b'^* = b'$$

توجه کنید که چون در آزمایش اعداد حقیقی به دست می‌آید لذا b' ها حقیقی هستند. و لذا داریم:

$$B^\dagger = \sum_{b'} \left\langle b'\right|^\dagger b'^* \left|b'\right\rangle^\dagger = \sum_{b'} \left|b'\right\rangle b' \left\langle b'\right| = B$$

یعنی کمیتهای مشاهده پذیر هرمیتی هستند.

اجازه دهید که به عنوان تمرین، صلیب عملگرهای پاولی را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
1 &= \left|++\right| + \left|--\right| \,, \\
\sigma_z &= \left|++\right| - \left|--\right| \,, \\
\sigma_x &= \left|-+\right| + \left|+-\right| \,, \\
\sigma_y &= \mathrm{i}\left|-+\right| - \mathrm{i}\left|+-\right|
\end{aligned}$$

و لذا داریم:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^\dagger &= \left|-+\right|^\dagger + \left|+-\right|^\dagger = \left|+-\right| + \left|-+\right| = \sigma_x \,, \\
\sigma_y^\dagger &= -\mathrm{i}\left|-+\right|^\dagger + \mathrm{i}\left|+-\right|^\dagger = -\mathrm{i}\left|+-\right| + \mathrm{i}\left|-+\right| = \sigma_y
\end{aligned}$$

عملگرهای پاولی یک مثال است که چگونه یک مشاهده‌پذیر یعنی اسپین در راستای x و y را با سمبلهای یک کمیت دیگر یعنی اسپین در راستای z نمایش دهیم. به طور کلی برای مشاهده پذیر B داریم (برای نمایش آن با سمبلهای یک کمیت مشاهده‌پذیر دیگر به نام A) :

$$
\begin{aligned}
B = 1B1 &= \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| B \sum_{a''} |a''\rangle\langle a''| \\
&= \sum_{a',a''} \langle a'|B|a''\rangle |a'a''| \; .
\end{aligned}
$$

این نشان می‌دهد که چگونه یک نوع نمایش از B با استفاده از n^2 عدد $\langle a'|B|a''\rangle$ و n^2 سمبل $|a'a''|$ داشته باشیم. این اعداد می‌توانند در یک ماتریس $n\times n$ به نمایش در بیایند:

$$
\begin{pmatrix}
\langle a_1|B|a_1\rangle & \cdots & \langle a_1|B|a_n\rangle \\
\vdots & & \vdots \\
\langle a_n|B|a_1\rangle & \cdots & \langle a_n|B|a_n\rangle
\end{pmatrix}
$$

برای مثال برای ماتریسهای پاولی داریم:

$$
\sigma_x : \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} , \; \sigma_y : \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} , \; \sigma_z : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \; 1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

حال تمام جبری که درباره عملگرها گفتیم را می‌توانیم راجع به ماتریسها پیاده کنیم. برای جمع داریم:

$$
\langle a'| \left(B + C \right) |a''\rangle = \langle a'|B|a''\rangle + \langle a'|C|a''\rangle
$$

که نشان‌دهنده جمع عناصر متناظر است. درباره ضرب دو عملگر داریم:

$$
\begin{aligned}
\langle a'|BC|a'''\rangle &= \langle a'|B\,1\,C|a'''\rangle \\
&= \sum_{a''} \langle a'|B|a''\rangle\langle a''|C|a'''\rangle
\end{aligned}
$$

که همان قانون ضرب ماتریسهاست.

ضرب یک عملگر در یک عدد

$$
\langle a'|\lambda B|a''\rangle = \lambda\langle a'|B|a''\rangle
$$

میخواهیم تاثیر صلیب را بر نمایش ماتریسی پیدا کنیم:

$$X=\sum_{a',a''}\langle a''|X|a'\rangle|a''a'| .$$

و لذا داریم:

$$X^{\dagger}=\sum_{a',a''}\langle a''|X|a'\rangle^{*}|a'a''|$$

که بیان می‌کند:

$$\langle a'|X^{\dagger}|a''\rangle=\langle a''|X|a'\rangle^{*}$$

یعنی باید ماتریس را ترانهاده و مزدوج مختلط کنید.

برای اعداد، صلیب همان مزدوج مختلط کردن است. برای مثال داریم:

$$\langle a'|b'\rangle^{*}=|b'\rangle^{\dagger}\langle a|^{\dagger}=\langle b'|a'\rangle$$

یا مثلا

$$\langle a''|X|a'\rangle^{*}=|a'\rangle^{\dagger}X^{\dagger}\langle a''|^{\dagger}=\langle a'|X^{\dagger}|a''\rangle$$