

ساخت کیوبیت ابررسانا

سونیا سیف آذر نژاد، علی نعمتی، علی تلاشان، کوثر حسینی، آتناز محمدی

فروردین ۱۴۰۱

فهرست مطالب

۲	۱	مدار نوسانگر خطی کلاسیک
۲	۱.۱	مروری بر معادلات خازن و القاگر
۳	۲.۱	معادلات مدار LC
۴	۳.۱	مدل سازی مدار با فنر
۴	۴.۱	فرمالیزم همیلتونی مدار
۵	۵.۱	مقدمه‌ای بر کوانتیزه کردن سیستم کلاسیک
۶	۲	نوسانگر غیر خطی
۶	۱.۲	کیوبیت ایزوله
۷	۲.۲	پیوند جوزفسون
۷	۳.۲	معادلات مداری پیوند جوزفسون
۸	۴.۲	کوانتیزه کردن نوسانگر غیر خطی

۱ مدار نوسانگر خطی کلاسیک

۱.۱ مروری بر معادلات خازن و القاگر

روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{Q} = i \quad (۱)$$

$$Q = CV \quad (۲)$$

$$\dot{\Phi} = V \quad (۳)$$

$$\Phi = Li \quad (۴)$$

می‌توانیم از روابط بالا دو رابطه‌ی زیر را استخراج کنیم که بعداً از آنها استفاده خواهیم کرد.

$$\frac{dQ}{dt} \stackrel{(2)}{=} \frac{dCV}{dt} \stackrel{(3)}{=} C\ddot{\Phi} \longrightarrow \dot{Q} = C\ddot{\Phi} \quad (۵)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} \stackrel{(4)}{=} \frac{dLi}{dt} = L \frac{di}{dt} \stackrel{(1)}{=} L\dot{Q} \longrightarrow \dot{\Phi} = L\dot{Q} \quad (۶)$$

همچنین برای بدست آوردن انرژی القاگر و خازن در مدار، رابطه‌ی زیر مفید خواهد بود:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = p(t) = v(t)i(t) \quad *$$

حالا با استفاده از روابطی که داریم میتوانیم به انجام محاسبات مربوطه بپردازیم.
با استفاده از ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$\varepsilon(t) = \int v(t)i(t)dt = \int \frac{Q}{c} \frac{dQ}{dt} dt$$

$$\varepsilon_{cap}(t) = \frac{1}{c} \int \frac{Q}{dq} = \frac{Q^2}{2C} \stackrel{2 \& 3}{=} \frac{C\dot{\Phi}^2}{2} \quad (۷)$$

و با استفاده از ۳ و ۴ بدست می‌آوریم:

$$\varepsilon(t) = \int v(t)i(t)dt = \int \frac{\Phi}{L} \frac{d\phi}{dt} dt$$

$$\varepsilon_{ind}(t) = \frac{1}{L} \int \frac{\Phi}{d\phi} = \frac{\Phi^2}{2L} \stackrel{1\&4}{=} \frac{L\dot{Q}^2}{2} \quad (8)$$

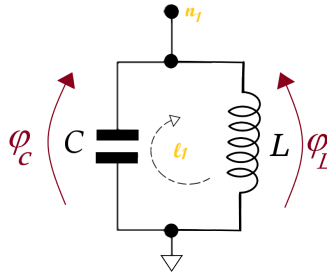
تا اینجا توانستیم ε_{cap} و ε_{ind} را بر اساس Q و Φ و مشتقات آنها بدست بیاوریم. در ادامه به نوشتن معادلات مدار LC خواهیم پرداخت و نیز تلاش خواهیم کرد مدل سازی انجام دهیم تا همین معادلات را بر حسب انرژی نیز محاسبه کنیم.

۲.۱ معادلات مدار LC

قوانین کیرشهوف را برای مدار مینویسیم:

۱. جمع جریان در گره ها صفر باشد

۲. اختلاف ولتاژ در یک دور صفر باشد



بر اساس ۲:

$$\sum_{b \in loop} \pm v_b(t) = \sum_{b \in loop} \pm \dot{\Phi}_b(t) = -\dot{\Phi}_L + \dot{\Phi}_C = 0$$

$$\longrightarrow \dot{\Phi}_L = \dot{\Phi}_C$$

بر اساس ۱:

$$\sum_{b \in node} \pm i_b(t) = \sum_{b \in node} \pm \dot{Q}_b(t) = \dot{Q}_C + \dot{Q}_L = 0$$

$$\xrightarrow[5for Q_C]{1&4for Q_L} C\ddot{\Phi} + L^{-1}\Phi = 0$$

$$\implies \ddot{\Phi} + \frac{1}{LC}\Phi = 0$$

۳.۱ مدل سازی مدار با فنر

می توان مدار را با یک سامانه ی جرم و فنر مدل سازی کرد! ممکن است این ادعا در ابتدا دور از ذهن باشد؛ با نوشتن معادلات مدار بر اساس مدل سازی جدیدمان می توان به صحت این مدل سازی پی برد. در ادامه کمیت هایی از مدار را که با کمیت های سیستم فنر و جسم مدل شده اند آورده ایم:

مدار	فنر
Φ	$x(position)$
Q	$p(momentum)$
C	$M(mass)$
$\frac{1}{L}$	$K(springconstant)$

معادله ی حرکت سیستم بالا خواهد بود:

$$\begin{cases} F = \frac{dp}{dt} \rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}C\dot{\Phi} = C\ddot{\Phi} \\ F = -K\Delta x \rightarrow -\frac{1}{L}\dot{\Phi} \end{cases} \implies C\ddot{\Phi} + L^{-1}\Phi = 0$$

با این مدل سازی به همان معادله ی قبل رسیدیم؛ پس مدل سازی درست است و با توجه به آن میتوان معادلات مدار را در دستگاه همیلتونی نوشت و نیز معادله حرکت را بدست آورد.

۴.۱ فرمالیزم همیلتونی مدار

برای نوشتن دستگاه همیلتونی عبارت زیر را در نظر بگیرید؛ از روابط ۷ و ۸ می دانیم ϵ_{cap} تابعیت Q و ϵ_{ind} تابعیت

Φ دارد :

$$H(\Phi, Q) = \text{kinetic energy}(Q) + \text{potential energy}(\Phi)$$

$$H(\Phi, Q) = \varepsilon_{cap} + \varepsilon_{ind} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}$$

معادلات حرکت نیز با آنچه بدست آورده بودیم مطابقت دارد:

$$\begin{cases} \dot{Q} = -\frac{\partial H}{\partial \Phi} = -\frac{\Phi}{L} \rightarrow \Phi = -L\dot{Q} \\ \dot{\Phi} = \frac{\partial H}{\partial Q} = \frac{Q}{C} \rightarrow \dot{Q} = c\ddot{\Phi} \end{cases} \Rightarrow \ddot{\Phi} + \frac{1}{LC}\Phi = 0$$

۵.۱ مقدمه‌ای بر کوانتیزه کردن سیستم کلاسیک

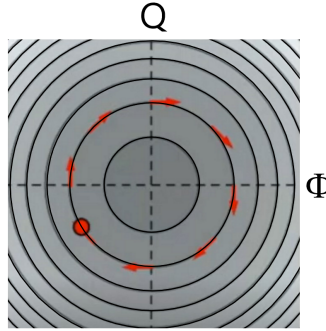
از بخش قبلی رابطه‌ی مدار در دستگاه همیلتونی را بدست آوردیم؛ در ادامه انرژی کوانتیده شده به شکل $E = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right)$ به سیستم خواهیم داد(در واقع بهتر است بگوییم سیستم ما به صورت بسته‌هایی گسسته انرژی را دریافت میکند و کوانتیزه است) و معادله‌ی همیلتونی کوانتیزه شده برای سیستم را بدست میآوریم:

$$H(\Phi, Q) = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \rightarrow \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} (Q^2 + \Phi^2)$$

در اینجا میتوان نمودار برحسب Q و Φ را رسم کرد؛

توجه داشته باشید که در فیزیک کلاسیک ما میتوانیم هر جایی از این نمودار باشیم(هر مقدار دلخواهی از انرژی را اخذ کنیم) اما میدانیم که در واقعیت این چنین نیست. و چنانچه در نمودار نیز حلقه‌هایی را نشان داده‌ایم، فقط میتوانیم انرژی‌ها مشخصی از سیستم را داشته باشیم. حرکت در این نمودار ما را به ارئه‌ی تعریفی دیگری برای دو کمیت سیستم رهنمود میکند؛ Q و Φ را در قالب عدد مختلط



تعریف میکنیم:

$$\alpha(t) := \frac{1}{\sqrt{2\hbar Z}} [\Phi(t) + iZQ(t)]$$

$$\begin{cases} \Phi(t) = \sqrt{\frac{\hbar Z}{2}} (\alpha(t) + \alpha^*(t)) \\ Q(t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2Z}} (\alpha(t) - \alpha^*(t)) \end{cases}$$

و نهایتاً شکل کوانتیزه شدی معادله‌ی همیلتونی را بدست میآوریم.

$$H(\Phi, Q) = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{C} + \frac{\Phi^2}{L} \right) = \frac{1}{2L} (Z^2 Q^2 + \Phi^2)$$

$$= \hbar\omega_0 (\alpha\alpha^* + \alpha^*\alpha)$$

۲ نوسانگر غیر خطی

۱.۲ کیوبیت ایزوله

به عنوان کیوبیت ما به سیستمی نیاز داریم که فاصله انرژی بین ترازهای مختلف آن یکی نباشد و به اصطلاح ایزوله باشد. در قسمت‌های قبل دیدیم که فاصله بین ترازهای مختلف انرژی نوسانگر یکسان میباشد. در نهایت هدف ما ساخت کیوبیتی با دو تراز و کنترل آن است. به طوریکه با دادن انرژی یا فوتونهایی با فرکانس مشخص به سیستم، حالت آن تنها بین دو تراز مختلف عوض شود. اما وقتی فاصله ترازهای مختلف یکسان باشد ممکن است این اتفاق نیافتد و با فوتون‌های با فرکانس مشخص، به جای جابجا شدن بین دو تراز، سیستم ما به ترازهای بالاتر برود و جابجایی‌های

ناخواسته اتفاق بیفتد.

۲.۲ پیوند جوزفسون

برای حل این مشکل به جای استفاده از القاگر ایده‌آل، از یک پیوند جوزفسون استفاده میکنیم. پیوند جوزفسون تشکیل شده از دو ابررساناست که بین آنها لایه ای عایق یا نیمه رسانا قرار دارد. در اینجا از پرداختن به جزئیات کامل در مورد پیوند جوزفسون اجتناب میکنیم و صرفاً به عملکرد آن در مدار و رابطه مشخصه انرژی آن میپردازیم. رابطه انرژی با شار گذرنده از پیوند به شکل زیر است

$$\varepsilon(\Phi) = E_J(1 - \cos(\frac{\Phi}{\Phi_0}))$$

که در آن E_J , Φ_0 ثوابتی میباشند که در ادامه به آنها خواهیم پرداخت. معمولاً در مسائلی که ما حل میکنیم؛ مقدار $\frac{\Phi}{\Phi_0}$ خیلی کوچک است. حال اگر رابطه بالا را برای مقادیر کوچک $\frac{\Phi}{\Phi_0}$ بسط دهیم:

$$\cos(\frac{\Phi}{\Phi_0}) = 1 - \frac{1}{2}(\frac{\Phi}{\Phi_0})^2 \rightarrow \varepsilon(\Phi) = E_J(1 - (1 - \frac{1}{2}(\frac{\Phi}{\Phi_0})^2)) \rightarrow \varepsilon(\Phi) = E_J \frac{\Phi^2}{2\Phi_0^2}$$

همانطور که مشاهده میکنید رابطه آن دقیقاً مانند رابطه القاگر ایده‌آل شد. به طوری که $\frac{\Phi_0^2}{E_J} = L$. حال اگر مقدار Φ_0 را داشته باشیم از روی ضریب القایی میتوان E_J را پیدا کرد. Φ_0 همان کوانتای شار در ابررساناهاست که از روی ثابت پلانک و بار الکترون به شکل $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ بدست می‌آید. حال اگر جملات مرتبه بالاتر را هم در نظر می‌گیریم رابطه انرژی پیوند جوزفسون به شکل زیر در می‌آید:

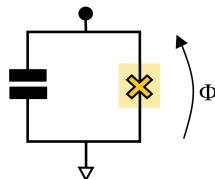
$$\varepsilon(\Phi) = E_J(\frac{\Phi^2}{2\Phi_0^2} - \frac{\Phi^4}{24\Phi_0^4} + O(\Phi^6))$$

جمله جدید اضافه شده انحراف پیوند جوزفسون از حالت القاگر ایده‌آل است که دقیقاً وظیفه غیریکسان سازی فاصله انرژی ترازها را به عهده خواهد داشت.

۳.۲ معادلات مداری پیوند جوزفسون

مداری مانند شکل ۲ در نظر بگیرید:
برای بدست آوردن معادلات مداری از فرمالیزم هامیلتونی که در قسمت‌های قبل با آن آشنا شدیم استفاده میکنیم. هامیلتونی سیستم به شکل زیر در می‌آید:

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} - \frac{\Phi^4}{24L\Phi_0^2}$$



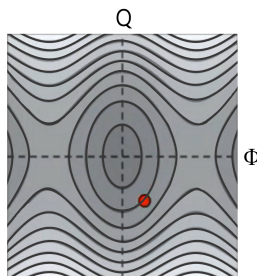
حالا از روی معادلات همیلتون به معادلات حاکم بر مدار میرسیم:

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = \dot{\Phi}, \frac{\partial H}{\partial \Phi} = -\dot{Q}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial Q} = \dot{\Phi}, \dot{\Phi} = \frac{Q}{C} \\ \frac{\partial H}{\partial \Phi} = -\dot{Q}, \dot{Q} = -\frac{\Phi}{L} + \frac{\Phi^3}{6L\Phi_0^2} \end{array} \right\} = \ddot{\Phi} + \frac{1}{LC}\Phi - \frac{1}{6LC\Phi_0^2}\Phi^3 = 0$$

آخرین جمله همان جمله غیر خطی است که به معادله ما اضافه میشود و نقش ایزوله کردن کیوبیت را بر عهده دارد.

در شکل زیر می‌توانید فضای فاز مسیر حرکت سیستم را مشاهده کنید.



۴.۲ کوانتیزه کردن نوسانگر غیر خطی

در اینجا فرآیندی را که برای کوانتیزه کردن نوسانگر خطی کلاسیک استفاده کردیم، در پیش میگیریم. ابتدا عملگر هامیلتونی را بر حسب عملگرهای بار و شار مینویسیم. سپس از روی تعریف عملگرهای نردبانی، هامیلتونی را بر حسب آنها بدست می آوریم. روابط جابجایی را نیز می‌توان از همتای کلاسیکی آنها، گروه پواسون، میتوان بدست آورد.

کوانتومی	کلاسیک
$\hat{H}$	H
$\hat{Q}$	Q
$\hat{\Phi}$	Φ
$\hat{a}^\dagger$	α
$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$	$\{\alpha, \alpha^*\} = 1/i\hbar$

دو رابطه ی زیر را نیز می توان از روابط قبلی یدست آورد:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar Z}}(\hat{\Phi} + iZ\hat{Q}), \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar Z}}(\hat{\Phi} - iZ\hat{Q})$$

از روی این روابطه میتوان عملگرهای بار و شار را بر حسب عملگرهای نردبانی نوشت. حال به سراغ همیلتونی با وجود پیوند جوزفسون می رویم . هامیلتونی جدید ما به شکل زیر است:

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{\hat{\Phi}^2}{2L} - \frac{\hat{\Phi}^4}{24L\Phi_0^2}$$

که اگر آن را بر حسب عملگرهای نردبانی بنویسیم به شکل زیر در می آید:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar^2}{96C\Phi_0^2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4$$

حال به سراغ محاسبه جمله آخر میرویم. اگر جمله آخر را باز کنیم و از روابط جابجایی استفاده کنیم به شکل زیر در می آید:

$$(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4 = (3 + 6\hat{a}^2 + 12\hat{a}^\dagger\hat{a} + 6\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^4 + 4\hat{a}^\dagger\hat{a}^3 - 6\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 - 4\hat{a}^{\dagger 3}\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 4})$$

در بین جملات بالا، جمله قرمز رنگ ثابت بوده و تنها یک شیف در مقدار انرژی های ما ایجاد میکند. اگر ما در تصویر هایزنبرگ عملگرهای نردبانی را برحسب زمان بنویسیم، خواهیم دید که جملات به رنگ بنفش توابعی تناوبی از زمان خواهند بود که به آنها به اصطلاح جملات چرخشی میگوییم. این جملات تغییری در اختلاف انرژی بین ترازها بوجود نمی آورند و تنها باعث انتقال سیستم بین ترازها میشوند. از طرفی جملاتی که به رنگ مشکی نشان داده شده اند؛ همان جمله های مورد نظر هستند که تابعیت زمانی ندارند و در تغییر فواصل بین تراز ها نقش خواهند داشت. در نهایت هامیلتونی ما به شکل زیر خواهد بود:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{E_J\Phi_{ZPF}^4}{4!}(12\hat{a}^\dagger\hat{a} + 6\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2)$$

$$\hat{H} = \hbar(\omega_0 - \frac{E_j \Phi_{ZPF}^4}{2\hbar}) \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{E_j \Phi_{ZPF}^4}{4} \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2$$

مشاهده میکنیم که جمله آبی در هامیلتونی تنها نقش تغییر فرکانس طبیعی سیستم را دارد و در غیر یکسان سازی فاصله تراز ها سهمی ندارد و تنها جمله ای که باعث تغییر در فاصله تراز ها خواهد شد، جمله آخر است. برای آنکه ببینیم جمله مذکور چگونه تراز های انرژی را تغییر میدهد باید از نظریه اختلال غیرتبهگن تا مرتبه اول استفاده کنیم. انرژی تراز n تا مرتبه اول اختلال برابر میشود با:

$$E_n = E_n^{(0)} - \langle n | \frac{\hbar\alpha}{2} \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 | n \rangle = \hbar\omega_q n (1 - \frac{\hbar\alpha}{2} (n-1))$$

حال اختلاف انرژی تراز ۱و۲ را با ۲و۳ مقایسه میکنیم.

$$E_{1 \rightarrow 2} = \hbar\omega_q (1 - \hbar\alpha)$$

$$E_{2 \rightarrow 3} = \hbar\omega_q (1 - 2\hbar\alpha)$$

همانطور که دیدیم، اختلاف ها دیگر یکسان نیست و کیوبیت ما ایزوله شده است.